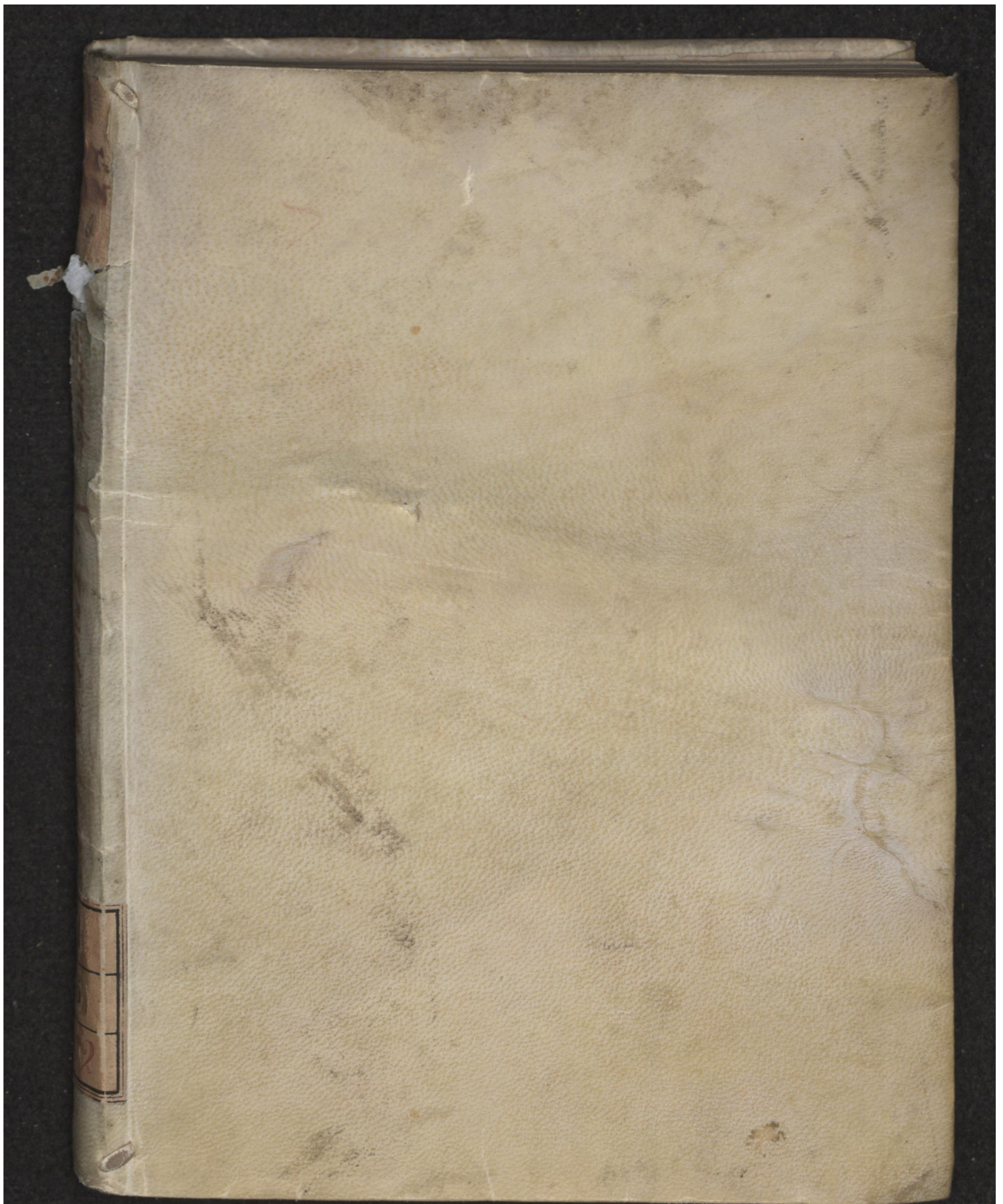


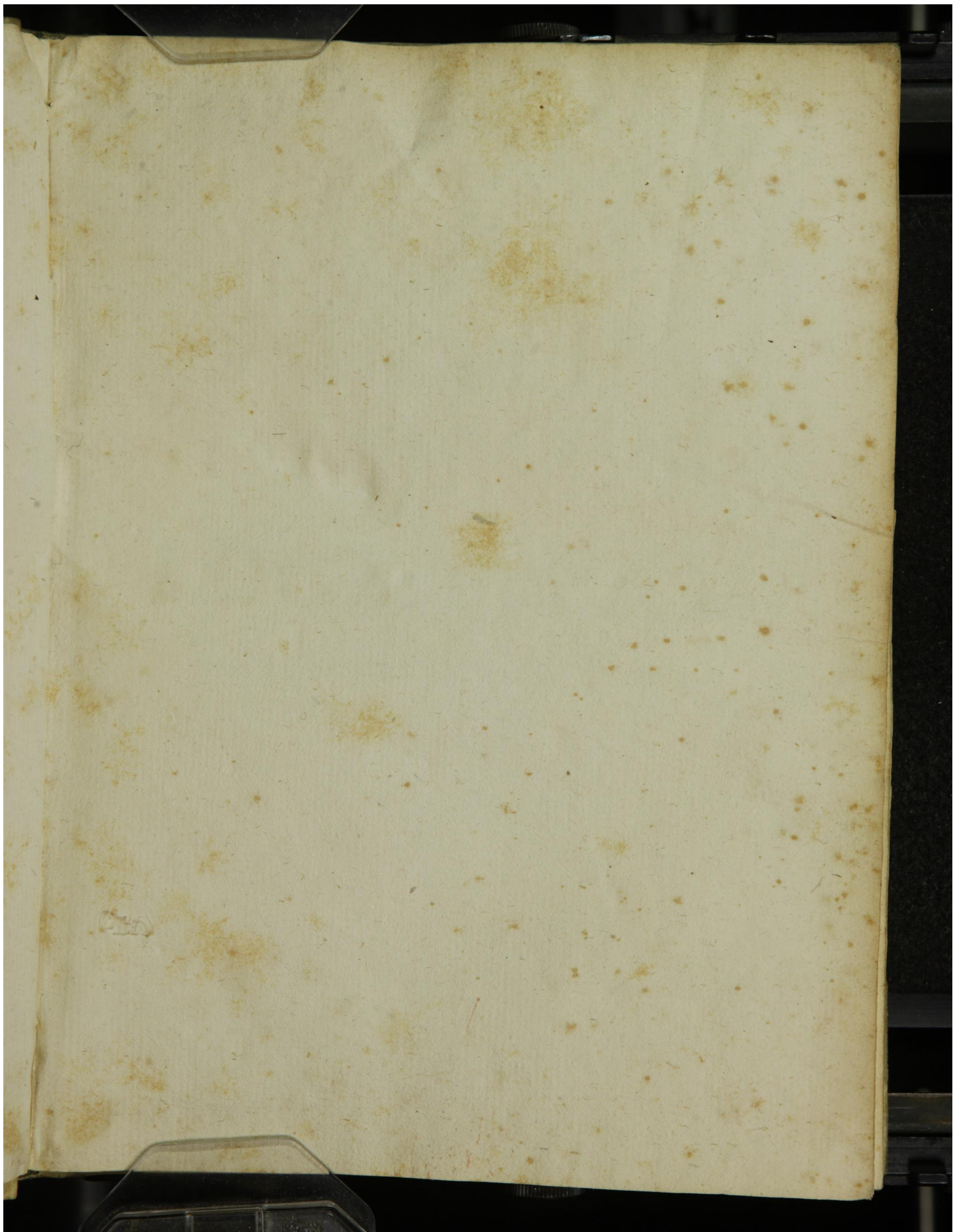

Aritmetica
1
6
302











ARITHMETICA
INTRODVCTIO
AD
LOGISTICAM
Vniuersæ Mathesi seruientem.

ÆGIDII FRANCISCI DE GOTTIGNIES

Bruxellensis è Societate IESV
In Collegio Romano
MATHESEOS PROFESSORIS

ARITHMETICA INTRODVCTIO *AD* LOGISTICAM

Vniuersæ Mathesi seruientem

CONTINENS

Vulgo vsitatam Arithmeticam practicam; atque ex hac, deriuationem Logisticæ practicæ, pertinentis ad Arithmeticam.



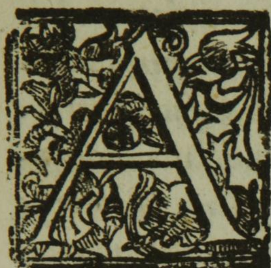


ROMAE, Typis Nicolai Angeli Tinassij. 1676.

SVPERIORVM PERMISSV.

ARGVMENTVM

Arithmeticæ Introductionis ad Logiſticam.



Rithmetica dicitur, ea pars Matheſeos, quæ pro obiecto habet quantitatem diſcretam; hæc Arithmetica diuiditur in ſpeculatiuam, & practicam; de Arithmetica practica hic agimus: quam duplicem conſideramus; alteram appellamus Arithmeticam noſtræ Logiſticæ, quia traditur in opuſculo quod inſcribitur Logiſtica; alteram dicimus vulgarem: non quia humile aut vulgare aliquid continet, ſed quia vulgo, ſiue paſſim, vſu recepta eſt. Vtrique iſti Arithmeticæ practicæ, commune eſt, aſſumere ſcriptiones, breuiter atque compendiatè repræſentantes numeros, vt circa illos commode inſtitui poſſint operationes Arithmeticæ; hoc eſt Additio, Subtractio, Multiplicatio, aut Diuiſio. In vario vſu iſtarum operationum, conſiſtit prædicta vtraque Arithmetica practica: atque inter illas propemodum nulla differentia inuenitur, quæ non dependeat à compendiatis ſcriptionibus: vtraque enim tantum cenſetur operationes ſuas inſtituere circa numeros quos repræſentat compendiata ſcriptione; & ab hac compendiata ſcriptione inter ſe diſtinguimus numeros vulgares, & Logiſticos. Etenim, ſupponendo quod per vnitatem ſimplicem, ſiue quod idem eſt, per vnitatem poſitiuam ſimplicem, intelligendum ſit illud, quod ex vi hypotheſis ſignificatur per vocem, vnum, ſimpliciter ſiue ſolitariè poſitam: numeros vulgares appellamus, qui repræſentantur per decem il-

las

las notas Arithmeticas, quarum significationem exponimus in primo capite huius opusculi; quæ notæ, siùe solitariè, siue simul positæ, ratione sui, aut loci, aut ordinis quo scribuntur, non repræsentant nisi vnitates positiuas simplices, siue integras, siue fractas atque subdiuisas. Quare vulgaris Arithmetica dici potest, quæ versatur circa solos numeros indicantes positiuas simplices vnitates, siue integras, siue fractas. Præter has vnitates positiuas simplices, nonnullas alias compendiata scriptione repræsentat, atque à prioribus, & inter se distinguit, Logistica nostra; tales sunt, vnitates denominatæ, quæ indicantur à numeris quos appellamus numeros denominatos. Deinde vnitates radicales, quæ indicantur à numeris qui radicales dicuntur. Denique vnitates negatiuæ, quæ à nostris numeris negatiuis indicantur. De his consuli potest primus liber nostræ Logisticæ, vel etiam posterior pars huius opusculi. Quare practica Logisticæ nostræ Arithmetica, dici posset, quæ versatur circa quoslibet numeros Logisticos.

In nostra Logistica, aliunde cognita supponitur Arithmetica vulgaris, vel potius illa pars Arithmeticæ vulgaris, in qua traditur modus compendiate scribendi quemlibet numerum vulgarem, atque enuntiandi numerum vulgarem compendiata scriptione repræsentatum; ac præterea, modus instituendi Additionem, subtractionem, multiplicationem, & diuisionem, circa propositos numeros vulgares. His aliunde suppositis, incipimus nostram Logisticam, à modo legendi compendiatas scriptiones Logisticas. In præsenti opusculo, prius exponitur illa pars Arithmeticæ vulgaris, quæ in nostra Logistica aliunde cognita supponitur: deinde declaratur, quomodo ex vulgari Arithmetica, propemo-

dum

dum ſingula deriuentur, quæ à nobis propoſita ſunt in primo Logiſticæ libro. Quoniam vero enumerata duo capita proponere, nihil aliud mihi videtur, quam viam ſternere, quæ à primis Arithmeticæ principijs ducit ad Logiſticam noſtram, atque ad illam aditum aperire: præſens opuſculum inſcribitur ARITHMETICA INTRODVCTIO AD LOGISTICAM. *Quid à me per Logiſticam ſignificetur: finis maxime arduus ac ſublimis in Logiſtica mihi propoſitus: facilis Logiſticæ vſus, atque non vulgares eius vtilitates: tum pro Arithmetica, tum pro Geometria, & Matheſi vniuerſa: melius intelligi poterunt ex altero opuſculo quod inſcribitur,* IDEA LOGISTICAE, SPECVLATIVE ET PRACTICE DECLARATA.

Ad ſcribendum vtrumque illud opuſculum, impulit me duplex experientia; nimirum, à me ſcriptam Logiſticam, & facile intelligi, & maxime prodeſſe auditoribus meis: eamdem tamen, alijs pluribus, videri difficilem, atque parum prodeſſe. Me in prima experientia non aberrare, teſtes ſunt, qui à me inſtituuntur in Mathematicis ſcientijs. De altera experientia, eamdem certitudinem non habeo: illam tamen cogor admittere, niſi velim fateri me neſcire quid ſcripſerim. Etenim virorum in Mathematicis verſatorum, non pauca teſtimonia ad me delata ſunt: aſſerentia, à me conſcriptam Logiſticam ſpecioſæ Algebræ compendium eſſe: quod aliqui teſtantur ſatis bene propoſitum: alij affirmant aliqua ex parte defectuoſum. Iam vero, vel Logiſtica noſtra Algebra eſt, vel non eſt Algebra; ſi primum, fateri cogor, & candide fateor, me, vel neſcire quid Algebra ſit, vel ignorare quid ſcripſerim. Si ſecundum, concedendum erit, viros in Mathemati-

cis versatos, perlecta nostra Logistica, nesciuisse quid legerint; hactenus cogor hanc postremam partem admittere; qua supposita, si tam perniciosæ temporis iacturæ causa sit, quod clausis vt ita dicam oculis scripta nostra percurrant, culpa mea non est; si vero causetur ab aliquibus tenebris quæ in nostra Logistica inueniuntur, non immerito à me requiri poterat maius lumen; vtinam illud quod affero, vel in hoc opusculo, vel in nostræ Logisticæ idea, prosit discentibus nostram Logisticam, & tamen molestum non sit illorum oculis, qui tenebris, vel tenuiori lumini dudum assueti, atque contenti viuunt.

EGo Dominicus Brunaccius Societatis Iesu, in Prouincia Romana Præpositus Prouincialis, potestate ad id mihi facta à Patre nostro Generali Io. Paulo Oliua, facultatem facio, vt liber cui titulus *Arithmetica Introductio ad Logisticam Vniuersæ Mathesi seruientem*, à P. Aegidio Francisco de Gottignies nostræ Societatis Sacerdote conscriptus, & eiusdem Societatis doctorum virorum iudicio approbatus, typis mandetur, si ijs, ad quos spectat, ita videbitur. In quorum fidem has litteras manu mea subscriptas, & sigillo muneris mei signatas dedi. Romæ 7. Augusti 1676. *Dominicus Brunaccius.*

Imprimatur,

Si videbitur Reuerendiss. P. Mag. Sac. Pal. Apost.

I. de Ang. Archiep. Vrb. Vicesg.

Imprimatur,

Fr. Raymundus Capisuccus Ordinis Prædicatorum Sac. Pal. Apost. Mag.

ARITH-

ARITHMETICAE VVLGARIS.

CAPVT PRIMVM.

De characteribus siue notis Vulgaris Arithmeticæ, atque illorum valore, & modo legendi numeros integros vulgares, talibus characteribus expressos.



T compendiata, & commoda scriptione exhiberi possint numeri, circa quos operationes suas instituere docet Arithmetica, quam vulgarem appellamus: deseruiunt decem characteres, qui aliter notæ, aut digiti, aut figuræ appellantur; sunt autem sequentes decem

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Nota, 1. exprimitur per vocem vnum. Nota, 2. exprimitur per vocem duo. Nota, 3. exprimitur per vocem tria. Nota, 4. exprimitur per vocem quatuor. Nota, 5. exprimitur per vocem quinque. Nota, 6. exprimitur per vocem sex. Nota 7. exprimitur per vocem septem. Nota 8. exprimitur per vocem octo. Nota, 9. exprimitur per vocem nouem. Nota, 0. cifra dicitur, exprimitur per vocem nullus, aut nihil. Singulæ istæ notæ, duplicem valorem habere possunt: ex his duobus valoribus, vnus est valor proprius, quem nota habet ratione sui; alter est valor localis, quem nota habet ratione loci, qui illi conuenit quando immediatè versus leuam præcedit alias notas, subsequentes versus dexteram.

Ratione sui, 1. significat vnam simplicem vnitatem, siue vnum; 2. significat duas vnitates simplices, siue vnum binarium vnitatum simplicium; 3. significat tres vnitates simplices, siue vnum ternarium vnitatum simplicium; 4. significat quatuor vnitates simplices, siue vnum quaternarium vnitatum simplicium; 5. significat quin-

que vnitates ſimplices, ſiue vnum quinarium vnitatum ſimplicium; 6. ſignificat ſex vnitates ſimplices ſiue vnum ſenarium vnitatum ſimplicium; 7. ſignificat ſeptem vnitates ſimplices, ſiue vnum ſeptenarium vnitatum ſimplicium; 8. ſignificat octo vnitates ſimplices, ſiue vnum octonarium vnitatum ſimplicium; 9. ſignificat nouem vnitates ſimplices, ſiue nouenarium vnitatum ſimplicium; 0. ſignificat nullam vnitatem ſimplicem, ſiue nihil.

Ratione loci, cuiuslibet notæ vel characteris valor proprius, toties in decuplum excreſcit, quot verſus dexteram ſubſequuntur characteres: exempli gratia, characteris, 8. valor proprius eſt octo, & ratione ſui ſignificat octo vnitates ſimplices: verum ſi hunc characterem 8. immediatè verſus dexteram ſubſequatur vnicus alius character, ſignificabit octuaginta vnitates ſimplices, ſiue octo decades vnitatum ſimplicium; hinc ſcriptio 80. legitur octuaginta; item ſcriptio 70. legitur ſeptuaginta; item ſcriptio 10. legitur decem; & ita de ceteris. Vbique ſubaudiuntur vnitatum ſimplicium indiuidua, ſiue vnitates ſimplices. Si characterem 8. verſus dexteram ſubſequantur duo characteres, ſed non plures: valor eius proprius bis in decuplum excreſcit, & ſignificabit octingenta, ſiue octo centena; hinc 800. legitur octingenta. 700. legitur ſeptingenta; 200. legitur ducenta; & ita de ceteris vbique iterum ſubaudiuntur indiuidua vnitatum ſimplicium, ſiue vnitates ſimplices; adeo vt vox octingenta, idem ſignificet ac ſi diceretur octingenta indiuidua vnitatum ſimplicium, ſiue octingentę vnitates ſimplices. Ex his patet quod ſcriptio 864. legatur octingenta ſexaginta quatuor; etenim character 8. ratione ſui, & loci, ſignificat octingenta: item character 6. ratione ſui, & loci, ſignificat ſexaginta: denique charecter 4. ratione ſui, & loci, ſignificat quatuor, cum proprius eius valor ratione loci non creſcat: adeoque tota ſcriptio 864. ſignificat octingenta ſexaginta quatuor.

Vt quælibet ſcriptio vulgaris Arithmeticæ notis expreſſa legi poſſit, ſufficit intelligere prædictos valores, proprios, atque locales notarum quibus vtitur vulgaris Arithmetica: dummodo in promptu ſint voces, quibus tales valores poſſint enuntiari. Verùm quia eiuſmodi valores qui centum aut mille ſuperant, parum vſitati ſunt apud eos, qui Arithmeticam non didicerunt; etiam in promptu non habent voces, quibus tales valores enuntiantur. Vt hic vocum defectus ſuppleatur, & quilibet facilè poſſit legere numeros vulgaris Arithmeticæ notis compendiosè ſcriptos, vtiles eſſe poſſunt ſequentes praxes.

Pra-

Praxis prima, siue modus legendi numerum vulgarem integrum, qui sex, aut paucioribus notis Arithmeticis exprimitur.

EX ijs, quæ paulo ante diximus, de significatione, ac valore characterum, aut notarum vulgaris Arithmeticæ, abundè patet, quomodo legantur numeri tribus tantum, vel paucioribus notis expressi; immo huiusmodi numeros legere vix vlli ignorant, qui aut legere, aut scribere didicerunt, cum quibus tantum agimus; itaque vel ex paulo ante traditis, vel aliundè, supposita notitia requisita, vt tribus, vel paucioribus notis expressi numeri legantur, hic tantum traditur, quomodo legantur numeri, qui exprimuntur, quatuor, quinque, aut sex, characteribus, aut notis Arithmeticis.

Incipiendo à fine numeri propositi, post tertiam notam ponatur virgula: deinde notæ virgulam præcedentes legantur, ac si nullæ aliæ sequerentur, atque his vocibus addatur vox mille, vel vox millia, pro vt sensus exigit: denique legantur etiam reliquæ tres notæ, ac si ipsas nullæ aliæ præcederent, sic enim totum propositum numerum rectè leges. Ex. Gr. numerus A. rectè legitur, dicendo, quatuor millia trecenta viginti sex, vbi apparet quomodo pro virgula legatur vox millia. Similiter numerus B. rectè legitur, dicendo, triginta quatuor millia trecenta viginti sex. Pari modo numerus C rectè legitur, dicendo, centum triginta quatuor millia trecenta viginti sex.

A. 4, 326

B. 34, 326

C 134, 326

Praxis secunda, Siue modus legendi numeros vulgares integros pluribus quam sex notis Arithmeticis expressos.

PRimo incipiendo à fine numeri propositi, totus numerus propositus diuidatur in membra, quæ singula sex notas contineant, atque puncto interposito ab inuicem distinguantur: membrum tamen quod versus sinistram primum est, non quidem plures, sed tamen pauciores quam sex notas continere poterit; deinde singulis punctis membra ab inuicem separantibus, subscriban-

tur numeri, indicantes, quot membra ſequantur verſus dexteram poſita; Sic enim habebitur numerus diuiſus in membra, quæ ſingula non plures quam ſex notas Arithmeticas continebunt, adeoque per primam praxim legi poterunt. Vt iuxta primam praxim ſucceſſiue legendo ſingula membra, legitime enuntietur totus numerus: duo diuerſi modi vtiles eſſe poſſunt.

Primus, atque paulo longior modus eſt, ſi incipiendo à ſiniſtra parte, ſingula membra ſucceſſiue legantur, hoc tantum obſeruando, vt vocibus quibus membrum enuntiatur, toties addatur vox millio (in caſu quem ſenſus exigit) quot vnitates indicat numerus ſubſcriptus puncto membrum terminanti; ſic enim legitime enuntiabis totum numerum.

Secundus modus paulo compendioſior, aſſumit ſubſequentes voces, millio, bilio, trilio, quatrilio, quintilio, ſextilio, ſeptilio: aut plures his ſimiles, ſi pluribus opus ſit; harum vocum prima, ſiue millio, ſignificat millies mille, vox bilio, idem ſignificat, ac vox millio bis ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus bilio, vel vnus millio millionum. Vox trilio, idem ſignificat ac vox millio ter ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus trilio, & vnus millio millionum millionum. Vox quatrilio, idem ſignificat ac vox millio quater ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus quatrilio, vel vnus millio millionum millionum millionum. Hinc ſatis manifeſtum eſt, quid ſignificent reliquæ voces hic aſſumptæ: & etiam quomodo his ſimiles aliæ efformari poſſint: ac denique, quæ ex his vocibus correſpondeat cuilibet numero ſubſcripto alicui puncto membrum terminanti; quibus cognitis, vt ſecundo atque paulo compendioſiori modo legatur propoſitus numerus: incipiendo à ſiniſtra parte, ſingula membra ſucceſſiue legenda erunt, hoc tantum obſeruando, vt vocibus quibus membrum enuntiatur, addatur vox correſpondens numero, qui ſubſcriptus eſt puncto membrum terminanti. Sic enim legitime enuntiabitur totus numerus.

Pro exemplo propoſitus ſit numerus A: qui paruus non eſt, immo plures vnitates ſignificat, quam ſint notæ Arithmeticæ, ad quas ſcribendas ſufficerent omnes totius orbis terrarum aquæ, in atramentum conuerſæ.

A.7032658491000375374293570130423.

Numerus A in membra diuiſus, repræſentatur à ſubſequenti ſcriptione: ex qua ſatis apparet, quomodo propoſiti maiores numeri in membra diuidendi ſint, vt commode legantur, iuxta praxim de qua hic agimus.

7.036258.491000.375374.293570.130423.
V. IV. III. II. I.

Hunc numerum iuxta primum modum ita leges. Septem milliones millionum millionum millionum millionum: triginta duo millia ſexcenti quinquaginta octo milliones millionum millionum millionum: quadringenta nonaginta vnum millia millionum millionum millionum: trecenta ſeptuaginta quinque millia trecenti ſeptuaginta quatuor milliones millionum: ducenta nonaginta tria millia quingenti ſeptuaginta milliones: centum triginta millia quadringenta viginti tria.

Eumdem numerum iuxta ſecundum modum, ita leges, ſeptem quintiliones: triginta duo millia, ſexcenti quinquaginta octo quatriliones: quadringenta nonaginta vnum millia trilionum: trecenta ſeptuaginta quinque millia trecenti ſeptuaginta quatuor biliones: ducenta nonaginta tria millia quingenti ſeptuaginta milliones: centum triginta millia quadringenta viginti tria.

Non video quæ in enuntiandis vulgaribus atque integris numeris ſupereſſe poſſit difficultas ad Arithmeticum ſpectans, cuius officium non eſt exponere leges pertinentes ad Grammaticorum genera, numeros, aut caſus. Si alicui videar, non ſatis exacte obſeruaſſe, has Grammaticorum leges, in enuntiandis propoſitis numeris: ſciat me id feciſſe ſuadente commoditate.

Aliqua notanda pro numeris vulgaribus, aut operationibus Arithmeticis.

Expoſita praxi enuntiandi quoslibet integros numeros vulgares compendioſe expreſſos notis Arithmeticis, quæque ad eiuſmodi notarum intelligentiam magis neceſſaria videbantur, propono hic aliqua magis neceſſaria pro tradendis de operationibus Arithmeticis inſtitutis circa numeros vulgares integros.

I. Quid ſit vulgaris Arithmetica dicitur in opuſculi huius argumento, numeri quos compendiata ſcriptione exhibet, dicuntur numeri vulgares, qui diuiduntur in integros & fractos; numeri vulgares integri dicuntur, qui indicant vnam vel plures vnitates ſimplices: fracti numeri vulgares dicuntur, qui indicant aliquas vnitates quæ ſint partes vnitatis ſimplicis.

II. Vnitas ſimplex dicitur illa quæ ſignificatur per vocem vnum ſimpliciter poſitam, ſed ex aliqua præcedente hypotheſi determinatam

natam ad significandam alicuius speciei vnitatem, siue indiuiduum: vnitas enim & indiuiduum hic idem significant. Exempli gratia posita hypothesi, quod per vocem vnum simpliciter positam placeat intelligere vnum hominem, vnitas simplex erit vnus homo. Similiter posita hypothesi, quod per vocem vnum simpliciter positam placeat intelligere binarium hominum, vnitas simplex erit binarius hominum. Pari modo posita hypothesi, quod per vocem vnum simpliciter positam placeat intelligere vnum binarium abstractum, vnitas simplex erit vnus binarius abstractus; atque ita de ceteris: quoties enim voces vnum, duo, tria, simpliciter positæ adhibentur, ex circumstantijs in quibus adhibentur, hoc est ex hypothesi in qua adhibentur, percipitur quid subaudiri debeat, siue qualia indiuidua, vel quales vnitates significent: atque hoc modo significatæ vnitates dicuntur vulgares simplices: vulgares quidem, quia per vulgares numeros indicantur: simplices vero quia indicantur per vocem vnum, aut vnitatem simpliciter prolatam, aut nota Arithmetica expressam.

III. Quando dicitur numerus A, intelligi debet numerus, quem ex vi hypothesis significat, siue repræsentat littera A; idem est de alijs alphabeti litteris. Exempli gratia posita hypothesi, quod littera A repræsentet numerum 24, numerus A, & numerus 24, idem significant. Similiter si agendo de numero exhibeatur numerus 20, aut alius aliquis, cum adscripta littera A, quod dicitur de numero A, intelligi debet de numero cui littera A adscripta repræsentatur. Pari modo si littera A assumatur ad significandum quemlibet numerum indeterminate sumptum, quod dicitur de numero A, intelligi debet de quouis numero indeterminate sumpto.

IV. Operationes vulgaris Arithmeticæ vniuersim sunt quatuor, nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuisio: quæ singulæ sunt operationes Arithmeticæ: atque omnes & solæ istæ operationes dicuntur operationes Arithmeticæ.

V. Numeri dati pro aliqua operatione Arithmetica, appellantur illi numeri, qui proponuntur pro facienda ea operatione. Ex: gr: si pro facienda additione proponantur numeri A & B; dati pro additione numeri erunt A & B: hi numeri dati, aliter vocantur genitores operationis Arithmeticæ, pro qua dantur, siue proponuntur.

VI. Numerus A plus numero B, idem significat, ac si diceretur numerus A simul cum numero B. Exempli gratia quia 6 simul cum 2 dat 8, etiam 6 plus 2 dat 8. Numerus A minus numero B, hic idem significat, ac si diceretur numerus A sublato numero B, siue illud quod remanet quando ex numero A aufertur numerus B. Ex-

empli

empli gratia quia ex numero 6 auferendo numerum 2, remanet numerus 4: etiam 6 minus 2 dat 4.

VII. Ex duobus genitoribus, siue numeris datis alicuius operationis Arithmeticæ, vnus vocatur superior, alter inferior. Datus numerus, siue genitor superior, dicitur ille cui alter debet addi. vel ex quo alter debet subtrahi, vel qui per alterum debet multiplicari aut diuidi. Inferior genitor, siue numerus datus, dicitur ille, qui debet addi, vel subtrahi, vel per quem alter debet multiplicari, aut diuidi. Exempli gratia, si genitores, siue dati numeri sint, A & B superior erit A & inferior erit B, supposito quod numero A debeat addi numerus B: vel quod ex numero A debeat subtrahi numerus B: vel quod numerus A debeat multiplicari, aut diuidi per numerum B.

VIII. Productum siue genitum ex aliqua operatione Arithmetica, dicitur numerus qui oritur ex tali operatione. Huiusmodi productum distinguo in totale & partiale; intelligendo per productum totale, totum numerum qui oritur ex tali operatione; similiter per productum partiale intelligendo, partem, siue vnam notam Arithmeticam producti totalis: quoties tamen sermo est de producto, vel genito ex aliqua operatione, & oppositum expresse non dicitur, agitur de producto totali. Aliter etiam Arithmeticæ operationis productum distinguo, nimirum in productum simplicis operationis, & productum compositæ operationis: primum est quod oritur ex simplici operatione, secundum est quod oritur ex composita operatione.

IX. Operationes Arithmeticas distinguo in simplices & compositas. Additio, & etiam subtractio erit simplex, si vnus ex duobus genitoribus, siue numeris datis pro additione, vel subtractione, exprimatur vnica nota Arithmetica; si vero vterque genitor exprimatur pluribus notis Arithmeticis, Additio, vel Subtractio, erit composita. Multiplicatio erit simplex, si vterque genitor, siue vterque numerus datus pro multiplicatione, exprimatur vnica nota Arithmetica; reliquæ multiplicationes dicuntur compositæ. Denique Diuisio erit simplex, si ex illa producatur vnica nota Arithmetica: reliquas diuisiones appello compositas; his tamen simplicium, compositarumque operationum distinctionibus non vtor nisi in operationibus institutis circa integros numeros vulgares, in quibus exponendis, à simplicibus, atque facilioribus operationibus, gradum facio ad compositas operationes.

CAPVT II.

De Additione numerorum integrorum vulgarium.

ADditio docet plures numeros in vnam ſummam colligere, atque hanc ſummam exhibere; ſiue inuenire vnum numerum qui propoſitis duobus, aut pluribus numeris ſimul ſumptis, æqualis ſit.

Additio de qua hic agitur poteſt eſſe ſimplex vel compoſita: quomodo additio ſimplex abſoluatur, ex ipſa additionis definitione adeo manifeſtum eſt, vt nulla declaratione indigeat: quis enim tam ignarus, vt neſciat, quod 2 plus 3 dent 5: item quod 7 plus 6 dent 13: item quod 15 plus 4 dent 19; vel quod numeri 2 & 3 ſimul ſumpti æquentur numero 5: item quod numeri 7 & 6 ſimul ſumpti æquentur numero 13? iam verò pauciores quàm decem vnitates eadem facilitate adduntur, minoribus, atque maioribus numeris: atque ea additio vocatur ſimplex, in qua alicui propoſito numero pauciores quam decem vnitates addendæ proponuntur; igitur prætermiſſa vlteriori expoſitione additionis ſimplicis, quæ ex ipſo additionis conceptu manifeſta eſt, neque vllam difficultatem annexam habet: venio ad additionem compoſitam, quæ expoſitione indiget, & declaro quomodo per iteratas additiones ſimplices abſoluatur compoſita additio, quando pro additione dati numeri ſunt vulgares, atque integri; & primo quidem trado praxim, qua huiuſmodi compoſitæ additiones abſoluuntur, quando dati numeri ſunt eiuſdem ſpeciei: deinde ex tradita praxi deduco additionem vulgarium atque integrorum numerorum, qui inter ſe ſpecie differunt; vtrum duo numeri ſint eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei declaratur capite 6. quod caput conſuli poterit ab eo, qui deſiderat magis exactam expoſitionem numerorum eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei.

Praxis prima, ſiue additio numerorum integrorum vulgarium, qui non differunt ſpecie.

PRrimò, mediante additione ſimplici, de qua paulo ante egimus, addēdo ſucceſſiue omnes notas Arithmeticas vltimo loco ſcri-

ptas in numeris datis pro additione, inuenies productum partiale, cuius producti postrema nota vltimo loco scribenda est in producto totali quod quæritur, & à reliquis notis producti partialis indicatæ vnitates (si aliquæ notę reliquæ sint ab vltima diuersæ) seruari debent pro penultimo loco. Secundò, iterum mediante simplici additione, seruatis pro penultimo loco vnitatibus addendo successiue omnes notas in datis numeris scriptas penultimo loco, habebitur nouum productum partiale, cuius postrema nota penultimo loco scribenda est in producto totali, atque à reliquis partialis producti notis indicatæ vnitates, seruandæ erunt pro antepenultimo loco. Simili plane modo successiue operando, circa datorum numerorum notas scriptas in locis æqualiter ab vltimo loco distantibus, inuenies productum totale quod desideratur.

Pro exemplo, propositi sint vulgares integri numeri A, B, C quos oporteat addere, atque inuenire productum ex tali additione. Cōmodum est ita datos numeros scribere, vt hic factum vides: nimirum vt omnes notæ vltimo loco scriptæ deorsum sibi respondeant: atque similiter deorsum sibi respondeant datorum numerorum notæ reliquæ, æqualiter distantes ab vltimis notis. Verum siue modo iam exposito, siue aliter scripti sint numeri dati, vt inueniatur productum additionis in hunc modum practice discurritur.

9 7 7 2 5 1.	A
2 3 0 9 6 3.	B
8 0 8 4 2.	C
1 2 8 9 0 5 6.	D

2 plus 3 dat 5, & 5 plus 1 dat 6, itaque in producto vltimo loco scribo 6, & nihil seruo pro penultimo loco. Rursus quia nihil seruatum fuit pro penultimo loco, 4 plus 6 dant 10, & 10 plus 5 dant 15: itaque penultimo loco scribo 5, & seruo 1. Rursus quia 1 seruaui, 1 plus 8 dat 9, & 9 plus 9 dat 18, item 18 plus 2 dant 20: itaque tertio loco à fine scribo 0 & seruo 2. Rursus quia 2 seruaui, 2 plus 7 dant 9, quarto loco à fine scribo 9 & seruo 0. Rursus quia 0 seruaui, 0 plus 8 dant 8, & 8 plus 3 dant 11, item 11 plus 7 dat 18, quinto loco à fine, scribo 8, & seruo 1. Rursus quia 1 seruaui, & 1 plus 2 dant 3, item 3 plus 9 dant 12, sexto loco à fine scribo 2, & seruo 1 pro septimo loco à fine, atque septimo loco à fine scribo 1 quia in datis numeris septimo loco à fine nihil inuenitur scriptum, adeoque nec addendum vnitati seruatæ pro septimo loco à fine: totusquè numerus D, per iteratas simplices additiones collectus, erit productum additionis propositæ.

Hæc sufficere existimo pro additione in qua duo, vel plures numeri vulgares integri, atque eiusdem speciei, addendi proponuntur: vt ex hac ipsa additione melius appareat praxis vsitata pro ad-

ditione, in qua (vt loquuntur practicæ Arithmeticæ ſcriptores) diuerſæ ſpecies addendæ proponuntur: vtile erit reflectere, additionem hic expoſitam, amplecti, ſiue inuoluere duo inter ſe diuerſa, nimirum iteratam additionem ſimplicem, & præterea reductionem vnius ſpeciei vnitatum ad vnitates alterius ſpeciei. Pro praxi propoſita requiri iteratam ſimplicem additionem ſatis manifeſtum eſt. Vt intelligatur pro eadem additionis praxi requiri reductionem vnitatum vnius ſpeciei ad vnitates alterius ſpeciei, aduertendum, vnitates ſimplices, ſpecie differre ab vnitatibus, quæ ſingulæ ſunt decades vnitatum ſimplicium: & iterum vtramque hanc vnitatum ſpeciem diuerſam, etiam ſpecie differre ab vnitatibus, quæ ſingulæ ſunt centenarij, aut millenarij vnitatum ſimplicium; hinc quando Exempli gratia pro decem vnitatibus ſimplicibus collectis ex notis vltimo loco ſcriptis ſeruatur vnitas, atque illa vnitas additur vnitatibus collectis ex vnitatibus ſcriptis penultimo loco, decem vnitates ſimplices reducuntur ad vnitatem alterius ſpeciei, nimirum ad vnam decadem vnitatum ſimplicium, quæ plane æquiualet decem vnitatibus ſimplicibus, atque adeo vna decas vnitatum ſimplicium non malè ſubſtitui poteſt, pro decẽ vnitatibus: ex quo non tantum conſtat, propoſitam additionis praxim inuoluere reductionem vnitatum vnius ſpeciei ad vnitates alterius ſpeciei; verum etiam quare talis vnitatum reductio legitimè adhibeatur, & in quo fundetur ea pars expoſitæ praxeos; quæ iubet notam aliquam ſeruari. Iam verò pro illis praxibus in quibus vulgaris Arithmeticæ ſcriptores docent addere numeros diuerſæ ſpeciei, ſufficiunt duo illa, quæ hic oſtendimus inueniri, aut conſiderari poſſe in propoſita praxi, quæ agit de additione numerorum eiuſdem ſpeciei; etenim in additionibus in quibus concurrunt numeri diuerſæ ſpeciei nuſquam docent, Exempli gratia, in vnam ſummam colligere tres libros, & quatuor calamos, qui duo numeri ſimul, neque conſtitunt ſeptem calamos, neque ſeptem libros, immo addi, ſiue in vnum numerum colligi non poſſunt, eo ipſo quod reduci non poſſint ad vnitates eiuſdem ſpeciei: ſed tantum docent inuenire numerum magis compendiatum, atque æquiualentem pluribus numeris datis pro additione, vt apparebit ex ſubſequente praxi.

Pra-

Praxis secunda, Siue additio numerorum integrorum vulgarium, quando aliqui ex datis numeris, indicant diuersæ speciei vnitates.

PRo hac praxi nihil requiritur, præter additionem numerorum eiusdem speciei,& reductionem vnitatum vnius speciei, ad vnitates alterius speciei, de quibus satis multa notauimus in præcedente praxi: reliquum igitur est, vt propositam praxim declaremus in exemplis. In quem finem numerus indicans 8 libras cum 10 vncijs addendus sit numero indicanti 14 libras, cum 9 vncijs; huius additionis productum haberi potest duplici modo. Primo. Mediante prima praxi vncias 10 addendo vncijs 9 habebis vncias 19 collectas ex datis numeris; & similiter per eamdem praxim, 8 libras addendo 14 libris, habebis 22 libras collectas ex datis numeris: adeoque ex datis numeris, vniuersim habebis collectas 22 libras cum 19 vncijs: atque hic numerus libras & vncias indicans, erit productum ex propositis numeris,atq; illis simul sumptis æquale,sed breuius exhibens, quod dati numeri minus compendiate indicant. Vbi obseruari potest, quomodo ad inueniendum additionis productum,nihil adhibitum sit,præter praxim primam,siue additionem numerorum eiusdem speciei.

libræ	vnciæ
14	9
8	10
22	19

Secundo. Mediante prima praxi, vncias 10 addendo 9 vncijs, habebis 19 vncias: quibus æquiualet vna libra cum 7 vncijs (nimirum supposito quod 12 vnciæ vnam libram constituant) itaque scribendo 7 vncias, & seruando atque transferendo vnam libram ex vncijs collectam, ad numeros libras significantes, etiam illi numeri erunt colligendi in vnam summam, atque ita habebis 23 libras, & numerus indicans 23 libras cum 7 vncijs, indicabit productum propositæ additionis. Vbi obseruari potest, inuentionem huius secundi producti, exhibentis 23 libras cum 7 vncijs, non differre ab inuentione producti exhibentis 22 libras cum 19, vncijs, nisi quod pro inuentione primi producti, adhibeatur sola additio tradita in prima praxi, hoc est sola additio numerorum eiusdem speciei; pro inuentione secundi producti, præter additionem numerorum eiusdem speciei, adhibetur reductio vnitatum indicantium vncias, ad vnitates indicantes libras.

libræ	vnciæ
14	9
8	10
23	7

Ex propositis duobus modis inueniendi productum additionis, quando dati numeri non sunt eiusdem speciei, vterque vtilis est: secundus tamen, qui inuoluit reductionem, requirit notitiam pro tali reductione requisitam, exempli gratia, quot vnciæ constituant vnam libram: vel vniuersaliter, quot vnitates vnius ex speciebus datis, constituant vnitatem alterius speciei: quare si desit hæc notitia, primus modus erit adhibendus.

CAPVT III.

De subtractione numerorum integrorum vulgarium.

SVbtractio docet minorem numerum ex maiori auferre, atque exhibere residuum; siue inuenire numerum qui sit differentia duorum numerorum qui proponuntur; vel inuenire numerum qui minori dato numero addi debet, vt habeatur numerus qui dato maiori numero æqualis sit.

Subtractio de qua hic agitur, potest esse simplex, vel composita: quomodo subtractio simplex absoluatur, manifestum est ex ipsa definitione subtractionis, neque vlla declaratione indiget: sic exempli gratia patet, quod 5 minus 2 det 3: item quod 19 minus 4 det 15; & quia pauciores quam decem vnitates eadem facilitate subtrahuntur ex numeris maioribus, atque minoribus; ea subtractio quæ simplex dicitur, & in qua nunquam plures quam 9 vnitates ex proposito alio maiori numero auferendæ proponuntur, manifesta est ex ipso conceptu subtractionis: neque vlla declaratione indiget; quomodo per iteratas simplices subtractiones absoluatur subtractio composita, in qua ex proposito numero maiori, plures quam 9 vnitates subtrahendæ proponuntur, docent sequentes praxes:

Praxis prima, siue subtractio numerorum integrorum vulgarium, qui non differunt specie.

PRimo mediante subtractione simplici, subtrahendo vltimam notam dati numeri inferioris, ex vltima nota dati numeri superioris (denario auctam si opus fuerit) habebitur vltima

ma

ma nota producti quæsiti: eritque pro penultimo loco seruanda vnitas, si vltima nota dati superioris numeri denario aucta fuerit; vel si hæc nota denario aucta non fuerit, nihil seruatur. Secundo quod seruatum fuit prius additur penultimæ notæ inferioris numeri, ac deinde aufertur ex penultima nota superioris numeri (denario aucta si opus fuerit) seruando vnitatem, si denario aucta fuit nota superior. Tertio successiue circa singulas notas quæ penultimas præcedunt, fit illud idem quod circa penultimas faciendum præscribitur: atque ita per iteratas simplices subtractiones, paulatim in producto colleguntur notæ omnes; quibus exprimitur propositæ subtractionis productum, siue residuum quod inueniri debet.

Pro exemplo, propositus sit numerus A, ex quo subtrahi debeat minor numerus B, eiusdem tamen speciei cum numero A. vt inueniam productum, siue residuum propositæ subtractionis commodum est ita datos numeros scribere, vt hic exhibentur: nimirum vt vltima nota dati inferioris numeri respondeat vltimæ notę dati numeri superioris: atque eodem modo reliquæ notæ numeri inferioris, respondeant notis numeri superioris; verum siue hoc modo, siue aliter scripti sint dati numeri, vt inueniatur productum subtractionis, in hunc modum practicè discurritur.

5 4 7 0 3 5.	A
8 2 6 1.	B
5 3 8 7 7 4.	C

5 minus 1 dat 4. itaque 4 scribo vltimo loco in producto, & nihil seruo (quia numerum 5 denario augere necesse non fuit ad faciendam simplicem subtractionem). Rursus quia nihil seruatum fuit, & 3 minus 6 est aliquid impossibile, sumo 13 minus 6 quod dat 7; itaque 7 scribo penultimo loco in producto, & seruo 1. Rursus quia 1 seruaui, 2 plus 1 faciunt 3, & 0 minus 3 est aliquid impossibile, sumo 10 minus 3, quod dat 7: itaq; in producto scribo 7 tertio loco à fine, & seruo 1. Rursus quia vnum seruaui, 8 plus 1 dat 9, & 7 minus 9 est aliquid impossibile, sumo 17 minus 9, quod dat 8: itaque in producto scribo 8 quarto loco à fine, & seruo 1. Rursus quia 1 seruaui, & nihil inuenio cui addi debeat, 4 minus 1 dat 3: itaque in producto scribo 3 quinto loco à fine, & nihil seruo. Rursus quia nihil seruaui neque in inferiori numero aliam notam inuenio, 5 minus 0 dat 5, in producto scribo 5 sexto loco à fine: eritque operatio absoluta, quia nullę supersunt notæ, circa quas continuari possit: adeoque notæ hactenus scriptæ in producto, exhibebunt numerum D quæsitum, atque exhibentem differentiam numerorum A & B, siue residuum quod relinquitur quando numerus B ex numero A aufertur.

Hæc

Hæc sufficere existimo pro subtractione in qua dati numeri sunt vulgares integri, atque eiusdem speciei. Vt ex subtractione exposita, melius innotescat praxis vsitata pro subtractione in qua proponuntur numeri diuersæ speciei, vtile erit aduertere, subtractionem hic expositam, inuoluere duo inter se diuersa (vt præcedenti capite monuimus agendo de additione) nimirũ iteratam subtractionẽ simplicem, & præterea reductionem vnitatum vnius speciei, ad vnitates alterius speciei. Primum satis manifestum est; pro secundo aduertendum, quod quoties ex notis æqualiter ab vltima distantibus, inferior ex superiori auferri non potest, tunc superiorem notam decem vnitatibus augeri, atque hunc vnitatum denarium, haberi ex vnitate, quæ proximæ præcedenti inferiori notæ addita, aufertur ex respondente nota superioris numeri: atque adeo vnitas, quæ decas est, reducta ad decem vnitates, decadi ęquiualentes, constituit illas decem vnitates, quibus augetur nota superior, ex qua inferior subtrahi non potest: ipsa verò vnitas quæ decas est, aufertur ex præcedenti nota; sicut enim in additione, decem vnitates qualescunque illæ sint, reducuntur ad vnitatem, quę sit decas prædictarum vnitatum, ita hic vnitas quæ est decas aliquarum vnitatum, reducitur ad decem eiusmodi vnitates. Ex his satis apparet, non tantum propositam subtractionis praxim inuoluere reductionem vnitatis vnius speciei, ad vnitates alterius speciei; verum etiam, quare talis reductio legitimè adhibeatur, & in quo fundetur ea pars expositæ praxeos, quæ iubet denario augeri notam, ex qua inferior nota subtrahi non potest; atque pro eiusmodi decem vnitatibus transferri, siue seruari vnitatem, quæ cum reliquis vnitatibus indicatis à proximè præcedente nota inferioris numeri, auferatur ex correspondente nota superioris numeri. Pro praxibus, in quibus Arithmeticæ practicę scriptores docent subtractionem, quando diuersæ speciei numeri proponuntur, nihil adhibetur, pręter subtractionem in prima praxi propositam, & reductionem vnitatum vnius speciei, ad vnitates alterius speciei; neque vsquam docent subtractionem pro qua hęc duo non sufficiunt; sic exempli gratia nusquam docent 3 libros ex 4 calamis subtrahere: siue inter tres libros & quatuor calamos differentiam inuenire; etenim inter omnes numeros possibiles, nullus inuenitur, qui sit differentia inter tres libros, & quatuor calamos, subtractio autem non docet nisi inuenire numerum qui propositorum duorum numerorum differentia sit.

Pra-

Praxis ſecunda, ſiue ſubtractio numerorum integrorum vulgarium, quando aliqui ex datis numeris indicant diuerſæ ſpeciei vnitates.

PRo hac praxi nihil requiritur præter ſubtractionem numerorum eiuſdem ſpeciei, & reductionem vnitatum vnius ſpeciei, ad vnitates alterius ſpeciei (de quibus ſatis multa in præcedente praxi) vt patebit ex ſubſequentibus exemplis. Ex numero 23 librarum cum 7 vnciis, ſubtrahendus ſit numerus 14 librarum cum 9 vncijs. Vt propoſitam ſubtractionem abſoluam ita practice diſcurro, 9 vncias ex 7 vncijs auferre non poſſum, igitur 7 vncijs addendo vncias conſtuentes vnā libram, hoc eſt 12 vncias, habeo 19 vncias: atque vnciæ 19 minus 9 vncijs dant 10 vncias: igitur in producto ſcribo 10 vncias, & ſeruo vnam libram: deinde vna libra ſeruata plus 4 libris dant 5 libras; verum 3 libræ minus 5 libris, eſt aliquid impoſſibile; quare ſumo 13 libras minus 5 libris, quæ dant 8 libras, quas ſcribo in producto, & ſeruo vnum (nimirum vnam librarum decadem) Rurſus quia vnum ſeruaui & 1 plus 1 dant 2: & 2 minus 2 dant 0 in producto deberem ſcribere 0, ſi proſequenda eſſet operatio, ſed quia illa abſoluta eſt, ob defectum aliarum notarum, circa quas continuari debeat, non ſcribo 0, quia primo loco poſitum nihil ſignificat; atque adeo productum propoſitæ ſubtractionis erit numerus, qui indicatur à notis ſcriptis in producto, nimirum numerus indicans 8 libras cum 10 vncijs.

libræ	vnciæ
23	7
14	9
8	10

Pro ſecundo exemplo, numerus indicans 10 gradus cum 52 minutis primis, & 7 minutis ſecundis; ſubtrahendus ſit ex numero indicante 20 gradus cum 5 minutis ſecundis. Vt in propoſito caſu productum ſubtractionis inueniam, ſic practicè diſcurro. 5 minuta ſecunda minus 7 minutis ſecundis eſt aliquid impoſſibile, quare ſumo 65 minuta ſecunda minus 7 minutis ſecundis, quæ dant 58 minuta ſecunda; igitur in producto ſcribo 58 minuta ſecunda & ſeruo vnum minutum primum, quod reductum ad 60 minuta ſecunda adhibitum fuit. Rurſus 52 minuta prima plus

Gradus	min. 1.	min. 2.
20	0	5
10	52	7
9	7	58

plus vno minuto primo quod seruatum fuit, dant 53 minuta prima: & quia nullum minutum primum minus 53 minutis primis est aliquid impossibile (reducendo vnum gradum ad 60 minuta prima) sumo 60 minuta prima minus 53 minutis primis, quæ dant 7 minuta prima: itaque in producto scribo 7 minuta prima, & seruo vnum gradum. Rursus vnus gradus seruatus plus 10 gradibus, dant 11 gradus, & 20 gradus minus 11 gradibus dant 9 gradus: itaque in producto scribo 9 gradus: eritque absoluta subtractio proposita: cuius productum continebit 9 gradus cum 7 minutis primis, & 58 minutis secundis.

CAPVT IV.

De multiplicatione numerorum integrorum vulgarium.

VOces multiplicare, & ducere, idem significant: adeo vt idem sit, numerus A ductus in numerum B, & numerus A multiplicatus per numerum B: vt monuimus capite primo.

Numerum vulgarem integrum A, ducere in vulgarem integrum numerum B, est inuenire numerum C, qui oritur ex tot numeris A simul sumptis, siue additis: quot vnitates indicantur à numero B. Vbi aduertendum nihil referre pro multiplicatione, an dati numeri A, & B, sint eiusdem, vel diuersæ speciei. Proposita definitio multiplicationis, conuenit integris numeris vulgaribus; vt habeatur definitio quæ etiam fractos numeros amplectatur: dici posset numerum vulgarem A ducere in vulgarem numerum B, esse idem, ac inuenire numerum C, cuius numerator oriatur ex tot numeratoribus numeri A simul additis, quot vnitates indicantur à numeratore numeri B: denominator vero oriatur ex tot denominatoribus numeri A simul additis, quot vnitates indicantur à denominatore numeri B. Quid sit alicuius numeri numerator, aut denominator, declaratur capite 6. Pro multiplicatione de qua hic agimus, sufficit definitio multiplicationis primo loco proposita: pro qua necesse non est intelligere quid sint vulgarium numerorum numeratores, aut denominatores.

Proposita definitione multiplicationis, exhibeo varios modos, siue

siue praxes, quibus inuenitur numerus productus ex multiplicatione duorum numerorum, qui singuli sint vulgares atque integri; & primo quidem propono aliquam multiplicationis praxim satis operosam, atque prolixam: sed tamen consideratione dignam, tum quia deducitur ex ipsa multiplicationis allata definitione, & nihil requirit nisi additionem expositam præcedenti capite: tum etiam quia est fundamentum reliquarum praxium in quibus compendiatæ multiplicationes proponuntur.

Praxis prima, siue prolixior multiplicatio integrorum atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam additionis expositæ superiori capite.

Per ea quæ de additione dicta sunt præcedenti capite, inueniatur productum ex tot numeris A simul additis, quot vnitates indicantur à numero B: atque hoc productum vocetur numerus C; erit numerus C productum ex numero A ducto in numerum B.

Exempli gratia, supposito quod numerus A sit 6 & numerus B sit 3, quia tres numeri 6 simul additi dant 18, productum ex numero 6 ducto in numerum 3, erit 18. Similiter supposito quod numerus A sit 14, & numerus B sit 4: quia quatuor numeri 14 simul additi producunt 56, etiam productum ex numero 14 ducto in numerum 4 erit 56. Pari modo supposito quod numerus A sit 25, & numerus B sit 12: quia duodecim numeri 25 simul additi dant 300, etiam productum ex numero 25 ducto in numerum 12 erit 300. Denique si numerus A sit 25, & numerus B sit 1, quia productum ex vno numero 25 nulli alteri addito est 25, etiam productum ex numero 25 ducto in 1 erit 25

Hæc sufficient pro prima praxi multiplicationis, quæ sola additione absoluitur, & parum vsitata est, ob prolixitatem quam requirit, quoties plane parui non sunt numeri qui proponuntur pro multiplicatione; reliquæ praxes, quæ docent magis vsitatas, atque compendiatas multiplicationes distinguendæ sunt, in eas quæ docent simplicem multiplicationem (in qua simplici multiplicatione vterque datus numerus exprimitur vnica nota Arithmetica) & in praxes quæ docent compositam multiplicationem, in qua singuli ex datis numeris non exprimuntur vnica nota Arithmetica. Composite

atque compendiatæ multiplicationes vix aliquid requirunt, præter iteratas multiplicationes simplices atque compendiatas; verum hæc simplex, atque compendiata multiplicatio, adeo facilis non est vt nulla prorsus expositione indigeat; pro eius declaratione vsitata est tabula, quam Pythagoricam appellant, quia eius inuentor fuit Pythagoras, vt igitur ordinatè exponam multiplicationes compendiatas, à facilioribus paulatim pergendo ad difficiliora, prius trado, quomodo mediante sola additione construatur tabula pythagorica: deinde doceo mediante hac tabula inuenire productum cuiuscunque simplicis multiplicationis: denique propono, quomodo mediante simplici multiplicatione compendiata, inueniatur productum cuiuscunque propositæ multiplicationis, quæ simplex non est.

Tabulæ Pythagoricæ constructio mediante sola simplici additione.

TAbulam Pythagoricam hic repræsentatam habes: constructionem eius paucis expono. Primo assumatur quadratum aliquod, subdiuisum in octuaginta, & vnum alia parua quadrata, inter se æqualia: atque in suprema nouem quadratorum serie, à sinistra parte versus dexteram ordine naturali sibi succedant nouem notæ Arithmeticæ, quæ vnam, vel plures vnitates indicant; in singulis quadratis, suprema quadrata deorsum succedentibus, scribatur productum ex additione duorum numerorum, quorum vnus inuenitur in quadrato proximè superiori, alter vero inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei: Exempli gratia in serie quadratorũ deorsum excurrente in qua supremo loco inuenitur numerus 4, secundo loco inuenitur numerus 8, qui producitur ex 4 plus 4, quorum vnus inuenitur in quadrato, quod proximè præcedit illud cui 8 inscribitur, alter verò inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei; quod quadratum supremum, idem est cum quadrato quod proximè præcedit illud cui

Tabula Pythagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

lud cui inscriptus est numerus 8. in hac eadem serie, tertio loco inuenitur numerus 12, qui producitur ex 8 plus 4 quorum vnus numerus 8 inuenitur in quadrato quod proximè præcedit illud cui 12 inscribitur, alter numerus 4 inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei. Similiter quarto loco inuenitur numerus 16, qui producitur ex 12 plus 4, quorum vnus numerus 12 inuenitur in quadrato, quod proximè præcedit illud cui inscriptus est numerus 16, alter numerus 4 inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei. Pari modo quinto locò inuenitur numerus 20, qui producitur ex 16 plus 4; item sexto loco inuenitur 24 qui producitur ex 20 plus 4. Item septimo loco inuenitur numerus 28 qui producitur ex 24 plus 4. Item octauo loco inuenitur numerus 32 qui producitur ex 28 plus 4. Item nono loco inuenitur numerus 36 qui producitur ex 32 plus 4. Denique quemadmodum hic in exemplo allato patet, quomodo vnius seriei deorsum excurrentis, numeri omnes producantur, simplici atque adeo facillima additione: ita etiam producì numeros cuiusuis alterius seriei deorsum excurrentis, facile est videre ex apposita tabula.

Laminarum Arithmeticarum constructio.

Expositę constructioni tabulæ Pythagoricæ, plane affinis est, constructio laminarum Arithmeticarum: immo singulæ laminæ Arithmeticæ, propemodum nihil aliud sunt, quam series quadratorum deorsum excurrentium in tabula Pythagorica, aut tabula Pythagorica secta in partes; singulæ enim laminæ Arithmeticæ, à singulis quadratorum seriebus in tabula Pythagorica deorsum excurrentibus, tantum differunt, quod laminarum quadrata singula, quæ supremum subsequuntur, à diametro diuisa sint in duo triangula: quorum infimum, atque versus dexteram positum, contineat postremam notam quadrato inscriptam: alterum triangulum contineat penultimam notam eidem quadrato inscriptam, si præter vltimam aliqua inscripta sit quadrato; in hunc modum constructam laminam, appellamus laminam Arithmeticam. Vnam huiusmodi laminam Arithmeticam, exhibet figura cui inscripta est littera B: quam conferendo cum serie quadratorum quæ à numero deorsum excurrit in tabula Pythagorica; facilè erit aduertere, verum esse, quod hactenus diximus de laminis Arithmeticis. Præter huiusmodi laminas ex tabula Pythagorica desumptas, *Fig.* 1.
aliquæ etiam requiruntur, in quarum supremo quadrato, vna

cifra, siue o contineatur: atque deorsum subsequentium quadratorum triangulis inferioribus, eadem cifra, siue o contineatur. Talem laminam repræsentat figura C. Denique requiritur laminarum Arithmeticarum index, quem repræsentat figura A. Hic index planè non differt à prima serie quadratorum, quæ ab vnitate deorsum
Fig. 1. excurrit in tabula Pythagorica. De numero laminarum nihil hic addo; etenim ex ijs quæ de laminarum vsu dicenda sunt, facilè quiuis colliget, quis laminarum numerus vtilis esse possit; neque enim certus aliquis, atque determinatus laminarum numerus necessarius est; sed talis diuersarum laminarum numerus requiritur, qui sufficiat ad solutionem subsequentis primi problematis.

Laminarum Arithmeticarum vsus longe præstantior est, vsu tabulæ Pythagoricæ; etenim præter eamdem illam commoditatem, quam Arithmeticæ candidatis affert tabula Pythagorica (quæ expleto tyrocinio abijcitur vt inutilis) talem vsum habent laminæ Arithmeticæ: vt mereantur retineri, atque adhiberi, etiam ab ijs qui in Arithmetica maximè versati sunt, sed tamen nolunt inutiliter, aut tempus terere, aut caput defatigare. Laminarum Arithmeticarum vtilitas curruum equorumue vtilitati similis dici posset; suo tempore, & loco, equo, aut curru vehi, maximè commodum est: sed tamen huiusmodi commoditatis necessitas, non leuis incommoditas foret; atque commiseratione dignus haberetur, qui ad ambulandum pedibus suis vti non posset, tametsi suo obsequio promptos haberet equos, aut currus. Pari modo Arithmetico, incomoda, & parum decora foret necessitas laminarum Arithmeticarum: quarum commoditatem nihil melius docet, quam vsus, si suo tempore, & loco adhibeantur: nimirum quando multiplicationum, aut diuisionum multitudo, aut prolixitas, compendium vel subsidium requirit: laminæ enim, omnem propemodum laborem multiplicationibus, aut diuisionibus proprium, tollunt: & in his operationibus eam tantum molestiam relinquunt, quæ additioni, aut subtractioni propria est; vt patebit ex dicendis de vsu laminarum Arithmeticarum. Vt hunc vsum suo loco commodius exponam, proderunt problemata sequentia.

PRO-

PROBLEMA I.

Propoſiti numeri vulgaris integri, columnam diuiſoriam exhibere in laminis Arithmeticis.

QVid ſit columna diuiſoria, & quomodo conſtrui poſſit: exponitur in praxi quinta ſubſequentis capitis. Vt in laminis Arithmeticis, exhibeatur columna diuiſoria propoſiti cuiuſuis numeri vulgaris integri; laminarum indici, ſucceſſiuè verſus dexteram ita apponendæ ſunt laminæ, vt ſupremæ illarum notæ, repræſentent propoſitum numerum. Exempli gratia ſi propoſitus ſit numerus 39, cuius numeri columna diuiſoria exhibenda ſit in laminis; indici immediatè apponendo laminam cuius ſuprema nota eſt 3: & huic lamini alteram apponendo cuius ſuprema nota eſt 9: habebis in laminis exhibitam columnam diuiſoriam quæſitam: quam repræſentat figura ſecunda. *Fig. 2.*

PROBLEMA II.

Deſcribere, aut legere, numerum propoſitæ indicis notæ correſpondentem; in columna diuiſoria exhibita in laminis Arithmeticis.

VT propoſito problemati ſatisfiat aduertendum duo contiguarum laminarum triangula, eidem indicis notæ correſpondentia, ſimul conſtituere rhumbum integrum: ſingula vero triangula eſſe dimidiatos rhumbos: atque in columna diuiſoria à laminis exhibita, ſingulis indicis notis lateraliter reſpondere ſeriem rumborum, quorum primus, & vltimus dimidiatus eſt, reliqui ſunt integri; denique rhumbis contentas notas ad eumdem locum ſpectare, ad quem ſpectant rhumbi. Hoc prænotato, vt deſcribatur columnæ in laminis exhibitæ numerus, reſpondens propoſitæ indi-

indicis notæ: illud vnum obſeruandum eſt, vt incipiendo à fine, atque addendo notas ad eumdem locum ſpectantes, deſcribatur numerus; qui inuenitur in ſerie rhumborum, quæ reſpondet propoſitæ indicis notæ. Exempli gratia, ex columna diuiſoria in laminis exhibita, atque repræſentata in primo problemate, deſcribendus ſit numerus reſpondens indicis notæ 2; hic numerus erit 78. etenim in ſerie rhumborum correſpondentium indicis notæ 2, poſtremus rhumbus continet notam 8: quæ proinde vltimo loco ſcribenda eſt; præterea penultimus rhumbus, continet duas notas 6 & 1; quæ notæ additæ dant notam 7 penultimo loco ſcribendam]. Similiter ex eadem columna deſcriptus numerus qui correſpondet indicis notæ 9: erit 351; quia poſtremus rhumbus continet notam 1, quæ proinde vltimo loco ſcribenda eſt; præterea penultimus rhumbus continet duas notas 7 & 8: quæ notæ additæ dant 15: adeoque penultimo loco ſcribenda nota 5, & altera nota 1 ſeruanda pro antepenultimo loco; denique quia antepenultimus rhumbus continet notam 2, illi addendo ſeruatam notam 1, habetur nota 3; antepenultimo loco ſcribenda.

Ex modo deſcribendi numerum, qui propoſitæ indicis notæ reſpondet in columna diuiſoria exhibita in laminis: facilè patet, quomodo legi poſſit eiuſmodi numerus: nimirum mente faciendo, quod præſcripſimus pro deſcriptione: idque facilè redditur, poſt aliquod exercitium in deſcribendis huiuſmodi numeris.

Praxis ſecunda, ſiue ſimplex atque compendiata multiplicatio integrorum atque vulgarium numerorum, mediante tabula Pythagorica.

Ex duobus numeris datis pro ſimplici multiplicatione, ſinguli exprimuntur vnica nota Arithmetica: id enim exigit multiplicatio quæ ſimplex dicitur; ex quo etiam patet quod ſinguli ex datis iſtis numeris inueniri poſſint, tum in ſiniſtra parte tabulæ, tum etiam in ſuprema parte tabulæ; itaque ex datis duobus numeris vnus inueniatur in ſuprema parte tabulæ, alter inueniatur in ſiniſtra parte eiuſdem tabulæ: deinde obſeruetur quadratum commune duabus quadratorum ſeriebus, quarum vna ab inuento in ſuprema parte numero recta deorſum excurrit, altera vero ab inuento in ſiniſtra parte numero dextrorſum excurrit, obſeruato communi quadrato, inſcriptum inuenies productum propoſitæ ſimplicis multiplicationis. Exempli gratia, ſi dati pro multiplicatione numeri ſint 4 & 5,

pro-

productum multiplicationis erit numerus 20: qui in scriptus est quadrato communi duabus quadratorum seriebus, quarum vna à numero 4 posito in süprema parte tabulæ, recta deorũ excurrit: altera à numero 5, posito in sinistra parte tabulæ dextrorsum excurrit. Simili plane modo inuenies quod 4 ductum in 4 det 16. Item quod 7 ductum in 5 det 35. item quod 8 ductum in 7 det 56. item quod 8 ductum in 9 det 72. atque ita de cæteris: neque est possibilis vlla multiplicatio simplex numerorum integrorum atque vulgarium, cuius productum non exhibeat tabula Pythagorica, adhibita modo hic proposito.

Vt ex proposita simplici, atque compendiata multiplicatione, gradum faciam, ad reliquas, hoc est compositas, atque compendiatas multiplicationes: distinguo duos diuersos casus qui possunt occurrere; primus est, quando ex datis pro multiplicatione numeris, vnus quidem pluribus notis Arithmeticis indicatur, alter verò exprimatur vnica nota Arithmetica. Secundus est, quando ex datis pro multiplicatione numeris, vterque scribitur pluribus notis Arithmeticis. Vtroque casu multiplicatio ast composita: in primo tamen casu, vix aliud requiritur quam iterata simplex multiplicatio: quemadmodum vero in primo casu productum inuenitur per iteratam simplicem multiplicationem, sic in secundo casu, productum inuenitur per iteratam multiplicationem primi casus; de primo casu agitur in tertia & quarta praxi; quinta praxis, agit de secundo casu.

Praxis tertia, siue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum, atque vulgarium quorum vnus vnica: alter pluribus notis Arithmeticis exprimitur.

QVis ex duobus numeris datis pro multiplicatione vocetur superior, vel inferior, parum refert: quoniam igitur liberum est, ex datis duobus numeris quemlibet pro inferiori assumere: ille vocetur inferior, qui vnica nota Arithmetica exprimitur, alter vero appelletur superior; quo posito,

Primo per praxim secundam (hoc est per simplicem multiplicationem) inueniatur productum ex inferiori numero ducto in notam vltimam superioris numeri, atque huius producti vltima nota, vltimo loco scribatur in producto quod quæritur, reliquæ notæ seruentur pro penultimo loco. Secundo, inueniatur productum ex

infe-

inferiori numero ducto in penultimam notam superioris numeri, atque huic producto addatur, quod pro penultimo loco seruatum fuit, & in hunc modum inuenti numeri vltima nota penultimo loco scribatur in producto quod quæritur. Denique in hunc modum successiue operando circa singulas notas superioris numeri, paulatim colliges omnes notas quibus indicatur productum quod quæritur.

Pro exemplo multiplicationis de qua hic agimus propositi sint duo numeri A & B, ita vt numerus A constet pluribus notis Arithmeticis, & numerus B vnica nota exprimatur; numerus A sit 53072; numerus B sit 4. Hos datos numeros A & B, scribere vt hic repræsentantur commodum est, non tamen necessarium; infra lineam repræsentatur propositæ multiplicationis productum, quod quæritur; vt hoc productum inueniam ita practicè discurro: 4 ductum in 2 dat 8, itaque in producto quæsito vltimo loco scribo 8 & nihil seruo. Rursus 4 ductum in 7 dat 28., & 28 plus 0 prius seruato dat 28, itaque in producto quæsito penultimo loco scribo 8, & seruo 2. Rursus 4 ductum in 0 dat 0, & 0 plus 2 prius seruato dat 2, itaque in producto quæsito tertio loco à fine scribo 2, & nihil seruo. Rursus 4 ductum in 3 dat 12, & 12 plus 0 siue nihilo seruato dat 12, itaque in producto quæsito quarto loco à fine scribo 2, & seruo 1. Rursus 4 ductum in 5 dat 20, & 20 plus 1 prius seruato dat 21, itaque in producto quæsito quinto loco à fine scribo 1, & seruo 2. Denique quia in superiori numero A non inuenitur vlla nota circa quam possit continuari operatio; nota Arithmetica 2, seruata pro sexto loco à fine, scribitur in producto quæsito, loco illi debito siue sextò à fine; atque ita erit absoluta multiplicatio proposita, cuius productum erit numerus 212288.

```
5 3 0 7 2. A
        4. B
------------
2 1 2 2 8 8
```

Praxis quarta, siue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum atque vulgarium: quorum vnus, vnica, alter pluribus notis Arithmeticis exprimitur: mediante columna diuisoria exhibita in laminis Arithmeticis.

PRimo. Per problema primum propositum pag. 21. in laminis Arithmeticis exhibeatur columna diuisoria numeri qui proponitur multiplicandus. Deinde in indice columnæ diuisoriæ inueniatur

tur

tur nota per quam propositus numerus multiplicandus est, atque inuentæ notæ correspondens columnæ numerus describatur vt docetur prob. 2. pag. 21. sic enim habebitur productum propositæ multiplicationis.

Exempli gratia numerus 39 multiplicandus sit per numerum 8. Columna diuisoria in laminis exhibita erit illa quæ exhibetur in figura secunda. Deinde nota in indice quærenda erit 8: atque huic notæ correspondens columnæ numerus descriptus iuxta problema 2 erit 3 1 2; adeoque verum erit, quod 39 ductum in 8 producat 3 1 2.

Praxis quinta, siue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum, atque vulgarium, quorum vterque pluribus notis Arithmeticis exprimitur.

PRimo per tertiam, vel quartam praxim, inueniatur productum ex postrema nota numeri inferioris, ducta in totum numerum superiorem: atque hoc productum ita scribatur, vt illi alia producta, decussatim, atque ordinatè subscribi possint. Similiter inueniatur productum ex penultima nota numeri inferioris, ducta in totum numerum superiorem; atque hoc productum prius inuento producto decussatim, atque ordinatè subscribatur. Pari modo successiuè inuenienda sunt producta ex singulis alijs notis inferioris dati numeri, ductis in totum numerum superiorem: atque inuenta producta, decussatim, atque ordinatè subscribenda sunt, prius inuentis productis. Denique omnia producta decussatim, atque ordinatè scripta simul addita, vt docetur capite secundo, dabunt productum multiplicationis propositæ.

Notandum hic quid intelligendum sit per decussatam, aut ordinatam partialium productorum scriptionem, quando dicitur partialia producta singula, inuenta per præcedentes praxes, decussatim, atque ordinatè scribenda esse. Singula illa producta partialia erunt decussatim scripta, si singulorum productorum partialium postrema nota, deorsum, correspondeat notę inferioris dati numeri, ex qua producitur. Deinde singula illa producta partialia erunt orditate scripta, si singulis notis producti partialis superiori loco scripti, respondeat tantum vna nota producti partialis scripti inferiori loco; vltimæ tamen notæ superiori loco scripti producti partialis, non respondet vlla nota producti partialis immediatè subscripti, quando illa producta decussatim scripta sunt. In subsequenti

quenti exemplo numeri C, D, E, decussatim atque ordinatè scripti repræsentantur.

Pro exemplo multiplicationis de qua hic agitur, datus numerus A sit 4 5 6 2: alter datus numerus B sit 7 5 3. Scriptis prius numeris datis A & B, vt hic repræsentantur, practicè discurrendo, vt docuimus in tertia praxi, vel sine discursu illo practico, vt docetur in quarta praxi, inuenio, 3 ductum in totum numerum A dare numerum 1 3 6 8 6, siue partiale productum C. Rursus eodem modo inuenio, 5 ductum in totum numerum A dare numerum 2 2 8 1 0, siue partiale productum D. Similiter inuenio 7 ductum in totum numerum A, dare numerum 3 1 9 3 4, siue partiale productum E: quæ singula producta partialia hic habes decussatim, atque ordinatè scripta. Denique producta partialia C, D, E, simul addendo, vt docetur capite secundo, habetur totale productum propositæ multiplicationis, nimirum numerus F, siue 3 4 3 5 1 8 6.

```
      4 5 6 2. A
        7 5 3. B
----------------
    1 3 6 8 6. C
  2 2 8 1 0.   D
3 1 9 3 4.     E
----------------
3 4 3 5 1 8 6. F
```

Pro complemento eorum quæ hactenus dicta sunt de muliplicatione, vtiles erunt subsequentes reflexiones.

Reflexio prima. Si aliquot postremæ notæ alicuius numeri propositi pro multiplicatione sint cifræ, siue 0. istæ cifræ omnes negligi possunt in multiplicatione: siue in dato superiori, siue in dato inferiori numero inueniantur; dummodo cifræ in ipsa multiplicatione neglectæ, omnes successiuè adscribantur inuento producto. exempli gratia, si 200 duci debeat in 3000 neglectis cifris quas nulla alia nota subsequitur, reliquus numerus 2 ductus in reliquum numerum 3 producet 6: huic producto successiuè adscribendo neglectas quinque cifras, habebitur numerus 600000: quare 200 ductum in 3000 producit 600000.

Reflexio secunda. Si inferior numerus datus pro multiplicatione contineat cifras alijs notis permixtas: negligi possunt istæ cifræ, dummodo partialia producta genita ex reliquis notis inferioris dati numeri, ordinatè atque decussatim scribãtur. Exẽplum eius, quod in reflexione dicitur, repræsentatur in apposita multiplicatione ordinatim scripta: in qua 3 0 0 2 ductum in 2 4 6 1 7 producit 7 3 9 0 0 2 3 4.

```
    2 4 6 1 7
      3 0 0 2
-------------
    4 9 2 3 4
7 3 8 5 1
-------------
7 3 9 0 0 2 3 4
```

Re-

Reflexio tertia. *Licet multiplicatio absolui possit per iteratam additionem; tamen, toto vt ita dicam cælo, ab additione differt multiplicatio.* Hoc imprimis constat ex ipsis definitionibus additionis, atque multiplicationis superius à nobis propositis. Deinde impossibile est, vt productum ex additione vulgarium numerorum, non sit maius quolibet genitore dato pro multiplicatione; verum productum ex multiplicatione non est semper maius quolibet genitore dato pro multiplicatione; sed subinde est maius, subinde æquale, subinde minus. Exempli gratia 2 ductum in 3 producit 6: quo casu productum ex multplicatione est maius quolibet genitore dato pro multiplicatione. 1 ductum in 1 producit 1; quo casu productum ex multiplicatione æquatur cuilibet genitori dato pro multiplicatione. 2 ductum in 1 producit 2; quo casu productum ex multiplicatione æquatur vni ex genitoribus datis pro multiplicatione. Præterea ex dicendis de multiplicatione numerorum fractorum vulgarium, constabit, quod 2 ductum in $\frac{1}{2}$ producat $\frac{2}{2}$ siue 1; quo casu productum ex multiplicatione est minus vno genitore dato pro multiplicatione, sed maius altero genitore. $\frac{1}{2}$ ductum in $\frac{1}{3}$ producit $\frac{1}{6}$: quo casu productum ex multiplicatione est minus quolibet genitore dato pro multiplicatione. Hinc facilè colliges, numerum A, ducere in numerum B, non esse idem ac numerum A, vel numerum B aliquoties sumere; quilibet enim numerus aliquoties sumptus necessario maior est numero qui aliquoties sumitur: quare si numerum aliquoties sumere, esset idem ac multiplicare talem numerum; etiam productum ex multiplicatione deberet esse maius numero qui multiplicatur.

CAPVT V.

De diuisione numerorum integrorum vulgarium.

NVmerum C diuidere per numerum B, est inuenire numerum A, qui ductus in numerum B producat numerum C. Pro diuisione nihil refert vtrum dati duo numeri sint eiusdem vel diuersæ speciei.

Propoſita definitione diuiſionis Arithmeticæ, exhibeo varios modos, ſiue praxes diuerſas, quibus abſoluitur diuiſio duorum numerorum vulgarium qui ſinguli integri ſint, atque inuenitur productum ex quibuslibet duobus eiuſmodi numeris. Et primo quidem propono praxim qua vtitur vulgaris Arithmetica, vt inueniat, ſiue exhibeat diuiſionis productum, quando numerus diuidendus minor eſt ipſo diuiſore. In reliquis praxibus, agitur de diuiſione, in qua numerus diuidendus non eſt maior diuiſore. Ex his praxibus, quæ ſecundo, & tertio loco proponuntur, operoſæ ſunt atque prolixæ, ac propterea minus vſitatæ; vtiles tamen non tantum ad profundiorem intelligentiam naturæ ipſius diuiſionis, atque reliquarum praxium: verum etiam pro ijs qui non amant compendia; in praxibus quæ tertiam ſubſequuntur, proponuntur diuiſiones compendiatæ, vel ſimplices, vel compoſitæ; tres diuiſiones ſimplices, atque compendiatæ inter ſe diuerſæ, proponuntur in quarta, quinta, & ſexta praxi, in ſingulis modo aliquantulum diuerſo, ſuperatur difficultas compendiatæ diuiſionis, quæ & ſimplici, & compoſitæ diuiſioni compendiatæ communis eſt, ac planæ præcipua, immo propemodum vnica quæ inuenitur in compendiata diuiſione: quandoquidem pro compoſitis, atque compendiatis diuiſionibus, vix aliud requiratur, quam iterata ſimplex, atque compendiata diuiſio; vt patebit ex praxibus quæ ſextam ſubſequuntur, in quibus docetur diuiſio compendiata, atque compoſita.

Praxis prima, ſiue diuiſio integrorum, atque vulgarium numerorum, quando diuiſor eſt maior numero diuidendo.

Ex datis duobus numeris ſuperior, ſiue diuidendus, ſcribatur ſupra lineolam, cui ſubſcriptus ſit diuiſor; hæc ſcripſio exhibebit productum propoſitæ diuiſionis.

Tam hic, quam in ſequentibus, quoties in eadem linea vnus numerus alteri ſubſcriptus inuenitur, ſubintelligi debet lineola duos iſtos numeros ſeparans: etenim paſſim omiſſa eſt, quia commode typis exprimi nō poterat.

Exempli gratia numerus diuidendus ſit 4, diuiſor ſit 10. ſcriptio $\frac{4}{10}$ exhibebit productum diuiſionis propoſitæ, eritque verum quod 4 diuiſum per 10 producat $\frac{4}{10}$ ſimiliter verum erit quod 27 diuiſum per 29 producat $\frac{27}{29}$. De modo legendi huiuſmodi ſcriptiones, fractos numeros repræſentantes, & de fractorum numerorum ſignificatione, agemus capite 6.

No-

Notandum hic eſt, ſcriptionem propoſitam non tantum adhiberi in vulgari Arithmetica, in caſu propoſito, nimirum, vt exhibeatur productum diuiſionis in caſu in quo diuiſor eſt maior numero diuidendo: verum etiam, quoties ex quauis alia diuiſione circa integros ac vulgares numeros inſtituta, remanet aliquod reſiduum diuiſionis; etenim notis Arithmeticis productis ex diuiſione, ſucceſſiue adſcribitur diuiſionis reſiduum, ſed ſupra lineolam cui ſubſcriptus ſit diuiſor. Exempli gratia, ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 23, & diuiſor ſit 4; nota producta ex diuiſione erit 5, diuiſionis reſiduum erit 3, totumque productum erit $5\frac{3}{4}$: eritque verum, quod 23 diuiſum per 4 producat $5\frac{3}{4}$. Similiter 7 diuiſum per 3 producit $2\frac{1}{3}$. Atque vniuerſaliter, quoties ex diuiſione remanet aliquod reſiduum, vt habeatur productum diuiſionis, ſemper diuiſionis reſiduum, ſcriptum ſupra lineola cui diuiſor ſubſcriptus ſit, ſucceſſiuè apponitur notis Arithmeticis productis ex diuiſione.

Praxis ſecunda, ſiue prolixior diuiſio integrorum, atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam additionis expoſitæ ſecundo capite.

Ex datis pro diuiſione numeris, ſuperior, ſiue diuidendus ſit C. Inferior, ſiue diuiſor ſit B; hoc poſito ſucceſſiue ſimul addendo plures, & plures numeros B inueniatur numerus D qui ſit æqualis vel proxime minor numero C; notæ Arithmeticæ indicantes quot numeri B fuerint ſimul additi, ad producendum numerum D; erunt notæ productæ ex propoſita diuiſione; diuiſionis reſiduum, erit differentia numerorum C & D; quare ſi notis productis ex diuiſione, ſucceſſiue adſcribatur inuentum diuiſionis reſiduum, vt dicitur in prima praxi, habebis productum propoſitæ diuiſionis. Exempli gratia numerus diuidēdus C ſit 50, diuiſor B ſit 12: hoc poſito, 12 plus 12 dant 24, & iterum 24 plus 12 dant 36, rurſus 36 plus 12 dant 48, cui non poteſt amplius addi 12, quin fiat maior quam 50: adeoque numerus 48 eſt proximè minor dato ſuperiori numero 50. Deinde quia numerus 48 productus eſt ex quatuor numeris 12 ſimul additis, etiam nota 4 eſt illa quæ producitur ex propoſita diuiſione. Denique propoſitæ diuiſionis reſiduum eſt 2, quia inuento numero 48 debet addi 2 vt æquetur numero 50; igitur propoſitæ diuiſionis productum eſt $4\frac{2}{12}$.

Pra-

Praxis tertia, siue prolixior diuisio integrorum, atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam subtractionis expositæ tertio capite.

EX datis pro diuisione numeris, superior, siue diuidendus sit C; inferior, siue diuisor sit B; hoc posito, diuisor B subtrahatur ex numero C, & rursus ex residuo huius subtractionis, subtrahatur diuisor B; atque hoc modo subtractiones continuentur donec relinquatur residuum minus ipso diuisore; notæ Arithmeticæ indicantes quoties diuisor B subtractus fuerit, erunt notæ productæ ex proposita diuisione; inuentum vltimum subtractionis residuum ipso diuisore minus, erit residuum propositæ diuisionis, & habebitur productum propositæ diuisionis, si notis productis ex diuisione adscribatur residuum, vt dicitur in prima praxi.

Exempli gratia numerus diuidendus C sit 50. diuisor B sit 12: hoc posito, 50 minus 12 dat 38; & iterum 38 minus 12 dat 26. Rursus 26 minus 12 dat 14. Rusus 14 minus 12 dat 2, quod residuum est minus ipso diuisore; quandoquidem verò diuisor successiue quater subtractus sit ex numero diuidendo, nota Arithmetica 4, est illa, quæ producitur ex proposita diuisione: eiusdemque diuisionis residuum est 2; quare propositæ diuisionis productum erit $4\frac{2}{12}$.

Duæ paxes diuisionis: hic propositæ, parum vsitatæ sunt, propter prolixitatem quam requirunt quoties plane parui non sunt numeri qui proponuntur pro diuisione; subsequentes diuisionis praxes docent magis compendiatas, atque vsitatas diuisiones: pro his (vt in alijs operationibus factum est) distinguo diuisionem in simplicem, & compositam; hoc est in diuisionem producentem vnicam notam Arithmeticam, & diuisionem producentem plures notas Arithmeticas; compositæ diuisiones compendiatæ, parum admodum requirunt, vltra iteratas simplices, atque compendiatas diuisiones: simplex atque compendiata diuisio subinde quidem facilis est, subinde tamen satis molesta est atque difficilis; hinc varias propono praxes quibus absoluitur simplex atque compendiata diuisio: vt ex pluribus, illa possit adhiberi, quæ vel propter facilitatem, vel propter compendium, vel quouis alio ex capite cuilibet magis arridebit. In diuersis circumstantijs, singulæ aliquam prærogatiuam habent; quæ in quarta diuisionis praxi proponitur vtitur tabula Pythagorica, atque vsu receptum est eam proponere incipientibus discere Arithmeticam practicam: parum tamen prodest quando diui-

diuiſor pluribus notis exprimitur. Reliquæ duæ, quæ in quinta, & ſexta praxi proponuntur, tales ſunt, vt reuera ignorem quænam alteri debeat præferri, licet enim illa, quæ in quinta praxi proponitur ſubinde aliquem quaſi inutilem laborem requirat, pro conſtructione columnæ diuiſoriæ qua vtitur: ſubinde tamen, ipſius columnæ conſtructio (ſaltem pro diuiſionibus compoſitis ad quas ordinatur hæc ſimplex diuiſio) non contemnendum compendium affert; & propemodum liberat omni periculo, incurrendi in errorem, cui maximè expoſita eſt ſimplex diuiſio quæ in ſexta praxi proponitur, hæc tamen talis eſt, vt eius ignorantia maximè dedeceret Arithmeticum practicum: quippe apud eos, qui vtuntur practica Arithmetica, maximè vſitata eſt: quia non ſemper quidem, ſed tamen ordinariè maius affert compendium: ipſa verò operationum compendia tanti fiunt, vt plerumque longioribus praxibus magis compendiatæ præferantur, licet maiores difficultates annexas habeant.

Praxis quarta, *ſiue ſimplex diuiſio numerorum integrorum vulgarium, mediante tabula Pythagorica: ſuppoſito tamen, quod diuiſor conſtet vnica nota Arithmetica.*

IN ſuprema parte tabulæ Pythagoricæ inueniatur propoſitus diuiſor: deinde inter numeros inuento diuiſori deorſum correſpondentes, obſeruetur numerus, dato numero ſuperiori æqualis, vel proximè minor, ſi nullus æqualis inueniatur; obſeruato in hunc modum numero, correſpondens nota Arithmetica poſita in ſiniſtra parte tabulæ, erit nota producta ex propoſita diuiſione: atque obſeruatus in tabula numerus ſubtractus ex dato ſuperiori numero dabit reſiduum propoſitæ diuiſionis; denique ſi notæ productæ ex diuiſione, adſcribatur reſiduum diuiſionis (vt dicitur in prima praxi) habebitur productum propoſitæ diuiſionis.

Exempli gratia, ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 56, & diuiſor ſit 7 inuenies diuiſori 7, ſcripto in ſuprema parte tabulæ, deorſum reſpondere numerum 56; & quia huic numero, in ſiniſtra parte tabulæ, reſpondet 8: etiam nota 8, erit illa quæ producitur ex propoſita diuiſione; præterea quia inuentus in tabula numerus 56, ſubtractus à numero diuidendo, qui etiam eſt 56, nullum relinquit reſiduum: productum propoſitæ diuiſionis erit 8: atque 56 diuiſum per 7 dat 8. Similiter ſuppoſito quod numerus diuidendus

ſit 59

ſit 59, quodque diuiſor ſit 7: inuenies diuiſori 7 ſcripto in ſuprema parte tabulæ, deorſum nuſquam reſpondere numerum diuidendum 59, illo tamen proximè minorem eſſe numerum 56; cui iterum in ſiniſtra parte tabulæ reſpondens nota 8, erit nota producta ex diuiſione: & quia 59 minus 56 dat 3, etiam reſiduum diuiſionis erit 3; ac denique 59 diuiſum per 7 dabit $8\frac{3}{7}$.

Praxis quinta, ſiue diuiſio compendiata, ac ſimplex numerorum integrorum, atque vulgarium, mediante columna diuiſoria.

PRo praxi quam hic tradimus requiritur columna diuiſoria, hanc columnam diuiſoriam in laminis Arithmeticis commodè exhibere, docuimus ſuperiori capite; hic vero independenter à laminis Arithmeticis; columnæ diuiſorię conſtructionem prius expono duplici diuerſo modo: primo quidem mediante ſola additione tradita capite ſecundo: deinde mediante multiplicatione tradita capite quarto. Denique expoſita cõſtructione columnæ diuiſoriæ; propono eius vſum, & praxim diuiſionis ſimplicis in qua adhibetur columna diuiſoria.

Columnæ diuiſoriæ conſtructio, mediante ſola additione, hæc eſt: primo, ordine naturali ſucceſſiue, atque deorſum excurrentes ſcribantur nouem notæ Arithmeticæ indicantes vnam, vel plures vnitates, atque hæc notarum ſeries vocetur index columnæ diuiſoriæ. Deinde indicis notæ 1, lateraliter adſcribatur propoſitus diuiſor exempli gratia 39. Item indicis notæ 2, lateraliter adſcribatur productum ex numero proximè ſuperiori qui eſt 39, addito diuiſori qui etiam eſt 39, quod productum eſt 78. Rurſus indicis notæ 3 lateraliter adſcribatur, productum ex numero proximè ſuperiori qui eſt 78 addito diuiſori qui eſt 39, hoc productum eſt 117. Rurſus indicis notæ 4, lateraliter adſcribatur, productum ex numero proximè ſuperiori, qui eſt 117, addito diuiſori qui eſt 39, quod productum eſt 156. Simili planè modo indicis notę 5; lateraliter adſcribitur 195, quia 156 plus 39 dant 165. Item indicis notæ 6, lateraliter adſcribitur 234, quia 195 plus 39 dant 234. Item indicis notæ 7 lateraliter adſcribitur 273, quia 234 plus 39 dant 273. Item indicis notæ 8, lateraliter adſcribitur 312, quia 273 plus 39 dant 312.

1.	3 9.
2.	7 8.
3.	1 1 7.
4.	1 5 6.
5.	1 9 5.
6.	2 3 4.
7.	2 7 3.
8.	3 1 2.
9.	3 5 1.

Deni-

Denique indicis notæ 9. lateraliter adſcribitur 351, quia 312 plus 39 dant 351. Hæc columnæ diuiſoriæ conſtructio, conuenit cum conſtructione tabulæ Pythagoricæ mediante additione: differt tantum, quod pro tabula Pythagorica ſufficiat ſimplex additio, pro columna diuiſoria requiratur aditio compoſita, quoties diuiſor exprimitur pluribus notis Arithmeticis.

Columnæ diuiſoriæ conſtructio mediante multiplicatione, hæc eſt. Primo vt paulò ante dictum eſt, ponatur index columnæ diuiſoriæ. Deinde cuilibet indicis notæ lateraliter adſcribatur; productũ ex indicis nota ducta in diuiſorem, Exempli gratia, poſito quod diuiſor ſit 39 indicis notæ 1, lateraliter reſpondebit 39: quia 1 ductum in 39 dat 39; indicis notæ 2, lateraliter reſpondebit 78: quia 2 ductum in 39 dat 78: indicis notæ 3, lateraliter reſpondebit 117: quia 3 ductum in 39 dat 117. Indicis notæ 4, lateraliter reſpondebit 156, quia 4 ductum in 39 dat 156; atque ita de cæteris

Diuiſio compendiata ac ſimplex, mediante columna diuiſoria, ita abſoluitur. Primo conſtruitur columna diuiſoria, in qua indicis notæ 1 reſpondet propoſitus diuiſor; vel certè talis columna exhibetur in laminis Arithmeticis iuxta problema 2 capitis 4. Deinde inter columnæ numeros, obſeruatur aliquis numerus, diuidendo numero æqualis, vel certè proximè minor, ſi deſit æqualis: obſeruato columnæ numero correſpondens indicis nota, erit nota producta ex propoſita diuiſione: atque obſeruatus columnæ numerus, ſubtractus ex numero diuidendo, dabit reſiduum propoſitæ diuiſionis: quare ſi notæ productæ ex diuiſione, adſcribatur inuentum diuiſionis reſiduum (vt dicitur in prima praxi) habebitur propoſitæ diuiſionis productum.

Exempli gratia, propoſitus numerus diuidendus ſit 299, diuiſor ſit 39; numero diuidendo proximè minor columnæ numerus erit 273, cui reſpondet indicis nota 7: quare nota producta ex propoſita ſimplici diuiſione erit 7; præterea, quia 299 minus 273 dat 26: propoſitæ diuiſionis reſiduum erit 26 atque adeo numerus 299 diuiſus per numerum 39, dabit productum $7\frac{26}{39}$

Non erit inutile circa propoſitam diuiſionis praxim notare; primo, quod hæc quinta praxis non differat à quarta praxi, niſi quod quarta praxis non adhibeat niſi columnas, vt ita dicam, diuiſorias, repręſentatas in tabula Pythagorica; verum quinta praxis, præter eaſdem columnas diuiſorias repręſentatas in tabula Pythagorica, adhibet quaſcunque alias: & dici poſſe in quinta praxi propoſitam diuiſionem, nihil aliud eſſe, quam diuiſionem in quarta

praxi propositam, sed ampliatam, atque reductam ad maiorem vniuersalitatem; etenim quartæ praxeos diuisio, restricta est ad solas diuisiones, in quibus diuisor exprimitur vnica nota Arithmetica: quinta praxeos diuisio, nullo modo restricta est, sed amplectitur quaslibet simplices vulgarium, atque integrorum numerorum diuisiones. Secundo notari potest, quod cum sola additione construi possit quælibet columna diuisoria, atque in praxi quæ adhibet columnam diuisoriam, nulla vnquam multiplicatio instituenda sit vt absoluatur proposita simplex, atque compendiata diuisio; etiam quælibet compendiata diuisio, absolui potest, absque omni difficultate, quæ non inuenitur in additione, aut subtractione; siue per solam iteratam additionem, aut subtractionem; etenim pro columnæ constructione sufficit iterata additio: pro simplicis diuisionis residuo inueniendo, sufficit subtractio; notam productam ex simplici diuisione, immediate exhibet columna, igitur pro simplici diuisione quæ mediante columna absoluitur, sufficit additio, & subtractio, neque requiritur vlla multiplicatio. Denique pro diuisionibus compositis, sufficit simplex diuisio sæpius iterata, vt patebit ex diuisione compendiata, atque composita quæ proponitur in septima praxi diuisionis: igitur pro qualibet diuisione, quæ mediante columna diuisoria absoluitur, sufficit additio, & subtractio, neque requiritur vlla multiplicatio.

Praxis sexta, siue diuisio compendiata, & simplex, numerorum integrorum vulgarium.

IN hac praxi, prudenti consideratione, propositi numeri diuidendi atque diuisoris; inueniendum est, quoties diuisor contineatur in numero diuidendo; quod subinde difficile est: etiam ijs qui commode versati sunt in practica Arithmetica; vt hæc difficultas aliquo modo subleuetur (independenter ab ijs, quæ in præcedentibus praxibus allata sunt) prodesse possunt, quæ hic subijcio notanda.

Notandum primo. Impossibile est, vt diuisor simplicis diuisionis plus quam nonies contineatur in numero diuidendo, vt patet ex definitione diuisionis simplicis. Deinde nota Arithmetica, indicans quoties totus diuisor contineatur in toto numero diuidendo, dicitur nota producta ex tali simplici diuisione.

Notandum secundo, Si in diuisore, & numero diuidendo, æque multæ notæ versus dexteram positæ negligantur; nota indicans, qua-

quoties reliquus diuisor contineatur in reliquo numero diuidendo, proximè etiam indicat, quoties contineatur totus diuisor, in toto numero diuidendo. Exempli gratia, supposito quod numerus diuidendus sit 3 8 2 4, quodque diuisor sit 8 4 2: vtrobique negligendo postremas duas notas, reliquus numerus diuidendus erit 3 8. & reliquus diuisor erit 8; præterea sicut reliquus diuisor 8, continetur quater in reliquo numero diuidendo 3 8: ita proximè totus diuisor 8 4 2, continetur quater in toto numero diuidendo 3 8 2 4; dixi proximè continetur, licet enim in allato exemplo verum sit, quod totus diuisor 8 4 2 contineatur quater in toto numero diuidendo: id tamen falsum foret, si manente eodem diuisore 8 4 2 numerus diuidendus foret 3 3 2 4: quo casu negligendo vtrobique duas vltimas notas, reliquus diuisor 8, in reliquo numero diuidendo 3 3 continetur quater: sed tamen totus diuisor 8 4 2, non nisi tertio continetur in toto numero diuidendo 3 3 2 4.

Notandum tertio. Assumpta nota aliqua Arithmetica, est maior quam nota producta ex simplici diuisione: si assumpta nota ducta in diuisorem, producat numerum maiorem numero diuidendo. Assumpta nota Arithmetica, est minor, quam nota producta ex simplici diuisione: si assumpta nota ducta in diuisorem subtrahatur ex numero diuidendo, atque huius subtractionis productum sit æquale, vel maius diuisore. Exempli gratia, numerus diuidendus sit 27 diuisor sit 4: his positis assumpta sit nota Arithmetica 7: quia 7 ductum in 4 dat 28, qui numerus est maior proposito numero diuidendo 27, legitime infertur, notam 7 esse maiorem; quam sit nota quæ producitur ex numero 27 diuiso per 4. Rursus assumpta sit nota Arithmetica 5; quia 5 ductum in 4 dat 20, & insuper 27 minus 20 dat numerum 7, qui maior est diuisore 4: legitimè infertur, notam 5 esse minorem, quam sit nota quæ producitur ex numero 27 diuiso per 4.

Vt per praxim de qua hic agimus inueniatur productum simplicis diuisionis. Primo, ex consideratione numeri diuidendi atque diuisoris, dirigentibus ijs quæ monuimus notanda esse, inuenienda est nota Arithmetica producta ex proposita simplici diuisione: hoc est nota indicans quoties diuisor contineatur in numero diuidendo. Deinde inuenta nota Arithmetica duci debet in diuisorem, atque huius multiplicationis productum subtractum à numero diuidendo dabit residuum propositæ simplicis diuisionis. Denique, notæ producta ex diuisione adscribendo eiusdem diuisionis residuum (vt dicitur in prima praxi) habebitur productum quæsitum.

Exempli gratia, propositus numerus diuidendus sit 2995 diuisor

ſit 39; primo inquirendo quoties diuiſor 39 contineatur in numero diuidendo 299 quod difficilus eſt, vel iuxta ſecũdum notandũ; inquirendo quoties 3 contineatur in 29, quod errori obnoxium eſt; inueniri debet, notam 7 eſſe illam quæ producitur ex numero 299 diuiſo per 39. Deinde quia 7 ductum in 39 dat 273: & inſuper 299 minus 273 dat 26: erit numerus 26 reſiduum propoſitæ diuiſionis: atque adeo numerus 299 diuiſus per numerum 39 dabit productum 7 $\frac{26}{39}$.

In propoſito exemplo inſinuamus duos modos inueniendi notam productam ex diuiſione; primus eſt, inquirendo quoties diuiſor 39 contineatur in numero 299; ſecundus modus eſt, inquirendo quoties 3 contineatur in numero 29 primum modum difficiliorem eſſe ſatis patet, quandoquidem non ita claré appareat, quoties 39 contineatur in 299: quam quoties 3 contineatur in 29. Secundum modum qui facilior eſt, errori obnoxium eſſe patet ex ſecundo notando: quoties tamen hoc ſecundo modo inquirendo notam productam ex diuiſione, aberratur: ipſe error facilè detegitur, ex ijs quæ neceſſaria ſunt ad inueniendum diuiſionis reſiduum: vt hoc reſiduum habeatur, neceſſe eſt, & notam ex diuiſione productam ducere in diuiſorem, & inſuper huius multiplicationis productum ſubtrahere ex numero diuidendo: quæ ſubtractio fieri non poterit, vel certè eius productum erit æquale aut maius diuiſore, ſi erratum fuit circa notam productam ex diuiſione: circa quam aliter aberrari non poteſt, quam pro ipſa aſſumendo aliam notam maiorem ſcilicet, vel minorem; iam verò ſi nota maior fuerit aſſumpta, in diuiſorem ducta ſubtrahi non poterit ex numero diuidendo, quia tale productum erit neceſſario maius numero diuidendo; ſi verò minor nota fuerit aſſumpta, neceſſariò inuentum diuiſionis reſiduum erit æquale vel maius ipſo diuiſore: vt conſtat ex tertio notando.

Expoſitis varijs praxibus ſimplicis, atque compendiatæ diuiſionis: venio ad diuiſiones compoſitas atque compendiatas: pro quibus vix aliquid requiritur, præter iteratas diuiſiones ſimplices; etenim quælibet diuiſio compoſita, tot diuerſis ſimplicibus diuiſionibus abſoluitur, quot notæ diuerſæ producuntur ex compoſita diuiſione: ſingulæ enim notæ productæ ex compoſita diuiſione, inueniuntur per ſingulas, atque diuerſas ſimplices diuiſiones, in his ſimplicibus diuiſionibus, diuiſor ſemper idem remanet, ſed numeri diuidendi diuerſi ſunt, nimirum partes, ſiue membra totius numeri, qui per compoſitam diuiſionem diuidendus proponitur; nam per membrum numeri diuidendi, intelligi debet, pars numeri diuidendi, quæ diuiſa per totum diuiſorem, vnicam diuiſionis notam

pro-

producit: ex his membris numeri diuidendi, primum dicitur, illud, ex quo per ſimplicem diuiſionem producitur prima nota numeri producti ex diuiſione; ſecundum membrum dicitur illud, ex quo per ſimplicem diuiſionem producitur ſecunda nota; tertium membrum dicitur, illud, ex qno per ſimplicem diuiſionem producitur tertia nota; atque ita de cæteris. Quemadmodum verò ſimplex diuiſio non niſi vnicam notam producit, ita totus numerus diuidendus ſimplici diuiſione, vnicum membrum conſtituit: hinc pro ſimplici diuiſione, neceſſe non fuit agere de membris numeri diuidendi: pro compoſitis diuiſionibus neceſſe eſt diſtinguere illa membra,& ſcire modum, quo membra illa inueniuntur; atque hoc vnum eſt quod pro compoſitis diuiſionibus compendiatis requiritur, vltra ea quæ de ſimplicibus atque compendiatis diuiſionibus dicta ſunt. De inuentione membrorum numeri diuidendi agunt proximè ſubſequentes duæ reflexiones, quæ neceſſariæ quidem ſunt, ſed nullis difficultatibus implicatæ, & tam faciles vt pro ſingulis ſimplex reflexio videatur ſufficere.

Reflexio prima. Vt habeatur primum membrũ numeri diuidendi: ex numero qui diuidendus proponitur, incipiendo à dextera parte verſus ſiniſtram, accipiuntur tot notæ Arithmeticæ, quot requiruntur ad conſtituendum numerum æqualem, vel proxime maiorem diuiſore, ſi æqualis haberi non poſſit. Exempli gratia ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 3 4 6 2 1 primum membrum erit 34: ſi diuiſor ſit 34, vel 30, vel 18, vel 4, vel quiuis alius numerus maior quidem numero 3, ſed non maior numero 34; ſic enim ſemper verum erit quod numerus 34, vel ſit æqualis, vel proxime maior diuiſore: adeoque primum membrum conſtituat; quod verum non eſſet, ſi diuiſor eſſet 3: quia huic diuiſori æquatur prima nota numeri diuidendi, idem etiam verum non eſſet, ſi diuiſor eſſet 35, vel alius maior numerus: quia hoc caſu numerus 34 non eſſet æqualis, aut proximè maior diuiſore. Si in propoſito exemplo diuiſor eſſet 35, primum membrum eſſet 346: idemque verum eſſet, ſuppoſito quod pro diuiſore daretur quiuis numerus maior quã 34, ſed minor quam 346. Denique primum membrum eſſet 3, ſi pro diuiſore daretur numerus 3, vel 2, vel 1.

Reflexio ſecunda. Vt habeatur numeri diuidendi membrum aliquod, diuerſum à primò membro: reſiduo ſimplicis diuiſionis, inſtitutæ circa membrum proximè præcedens, ſucceſſiue adſcribatur vna illa nota numeri diuidendi, quæ proximè ſequitur præcedentis membris vltimam notam ſumptam ex numero diuidendo:

do: etenim cuiusuis mẽbri vltima nota semper sumitur ex numero diuidendo. Exempli gratia numerus diuidendus sit 6 4 7 7 diuisor sit 4: quare iuxta primam reflexionem primum membrum erit 6: iam verò si circa primum membrum institutæ diuisionis residuum sit 2, secundum membrum erit 24: quod habetur, residuo 2, successiue adscribendo notam 4, quæ in numero diuidendo proximè sequitur notam 6, quæ primi membri vltima est. Rursus, si circa secundum membrum 24, institutæ simplicis diuisionis residuum sit nihil, siue 0: tertium membrum erit 7, quod habetur residuo, siue 0, successiue adscribendo notam 7, quæ in numero diuidendo proximè sequitur notam 4. quæ in secundo membro est vltima; estquè planè idem siue scribatur 0 7, siue scribatur 7. Rursus, si circa tertium membrum institutæ simplicis diuisionis residuum sit 3, quartum membrum erit 37: quod habetur, residuo 3, successiue adscribendo notam 7, quæ in numero diuidendo proximè sequitur aliam notam 7, quæ in tertio membro vltima est.

Praxis septima, siue diuisio composita atque compendiata numerorum integrorum vulgarium.

QVælibet composita atque compendiata diuisio numerorum integrorum vulgarium, absoluitur, alternis inueniendo, & diuisionis membrum, vt docetur in duabus reflexionibus præcedẽtibus & circa inuentum membrum instituendo simplicem diuisionem; etenim membri inuentio necessaria est vt simplex diuisio institui possit & ex singulis simplicibus diuisionibus, singulæ notæ Arithmeticæ producuntur, quæ successiuę scriptæ, cum apposito vltimæ simplicis diuisionis residuo (scripto vt docetur in prima praxi) exhibent productum compositæ diuisionis.

Praxim paucis expositã, declaro varijs exẽplis; inter quæ satis notabilis diuersitas inuenitur: sed non aliunde causata, quam ex modo diuerso, quo institui possunt diuisiones simplices atque compendiatæ, quæ necessariæ sunt pro compendiata atque composita diuisione.

Primũ exemplũ septimæ praxis, in quo mediante columna diuisoria inuenitur productum ex numero 6897, diuiso per numerum 39. Primo ex diuisore 39 cõstruo columnã diuisoriam, vt docetur in praxi quinta, quam columnam diuisoriam hic representatam habes: vel certè columnam illam exhibeo in laminis Arithmeticis. Deinde ita practicè discurro. Primum membrum est 68: hoc mem-

membro proximæ minor columnæ numerus eſt 39, cui in indice reſpondet 1: igitur in quotiente ſcribo 1, ipſi vero membro 68, ſubſcribo inuentum columnæ numerum 39, qui ſubtractus ex numero 68, relinquit 29: cui ſucceſſiue adſcribo notam 9, numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 299: hoc membro proxime minor columnæ numerus eſt 273, cui in indice reſpondet 7, igitur 7 ſcribo in quotiente, & inuentum columnæ numerum 273, ſubſcribo adhibito membro 299: facta ſubtractione remanet numerus 26, cui ſucceſſiue adſcribo notam 7 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 267; hoc membro proximè minor columnæ numerus eſt 234, cui in indice reſpondet nota 6, quam ſcribo in quotiente: & inuentum columnæ numerum 234 ſubſcribo adhibito membro 267; facta ſubtractione remanet 33 cui ſucceſſiue adſcribere non poſſum aliam notam numeri diuidendi adeoque diuiſio eſt abſoluta, & notæ productæ ex diuiſione erunt 176: vltimæ ſimplicis diuiſionis, atque adeo totius compoſitæ diuiſionis, reſiduum erit 33: quare productum ex propoſita diuiſione erit $176\frac{33}{39}$: eritque verum, quod 6897 diuiſum per 39 producat $176\frac{33}{39}$.

1.	29	6897	($176\frac{33}{39}$
2.	74	39	
3.	117	———	
4.	156	299	
5.	195	273	
6.	234	———	
7.	273	267	
8.	312	234	
9.	351	———	
		33	

Secundum exemplum ſeptimæ praxis, in quo mediante columna diuiſoria productum inuenitur, paulo magis compendiata ſcriptione.

Numerus diuidendus ſit 6897 diuiſor ſit 39: quibus poſitis, primo conſtruo columnam diuiſoriam, vt in præcedenti exemplo. Deinde ita diſcurrendo operor: primum membrum eſt 68, hoc membro proxime minor columnæ numerus ex 39, cui indicis nota 1 reſpondet: itaque in quotiente ſcribo 1, & inuentum columnæ numerum 39 ſubtrahendo ex propoſito membro 68, habeo reſiduum 29: quod ſubſcribo membro propoſito: ſcriptum reſiduum 29 cum nota 9 numeri diuidendi conſtituit nouum membrum 299, quo mẽbro proxime minor columnæ numerus eſt 273, cui reſpondet indi-

cis

eis nota 7. itaque in quotiente ſcribo 7, & inuentum numerum 273, ſubtrahendo ex propoſito membro 299, habeo reſiduum 26, quod ſubſcribo membro adhibito; reſiduum 26, cum nota 7 numeri diuidendi, conſtituit nouum membrum 267; quo membro proximè minor columnæ numerus eſt 234, cui reſpondet indicis nota 6: itaque in quotiente ſcribo 6, & inuentum columnæ numerum 234 ſubtrahendo ex propoſito membro 267, habeo reſidum 33, quod ſubſcribo adhibito mẽbro; & quia nulla ſupereſt nota, cum qua reſiduum nouum membrum conſtituere poſſit, abſoluta eſt operatio, & productum erit 176 $\frac{33}{39}$.

1.	39	6897	(176 $\frac{33}{39}$
2.	78	29	
3.	117	26	
4.	156	33	
5.	195		
6.	234		
7.	273		
8.	312		
9.	351		

Diuiſio quæ mediante columna diuiſoria abſoluitur eſſet præferenda alijs omnibus mihi cognitis, niſi annexam haberet moleſtiam quam ſecum affert columnæ conſtructio: quæ tamen moleſtia magna non eſt, & aliqua ex parte euitari non poteſt: quandoquidem aliquæ ex multiplicationibus vtilibus pro columnæ conſtructione, neceſſario recurrant in ea diuiſione; in qua non adhibetur columna: immo fieri poteſt, vt multiplicationum pro diuiſione requiſitarum multitudo, maior ſit in ea praxi quæ columnam non adhibet, quam in altera in qua adhibetur columna; etenim quando columna adhibetur, non niſi octo multiplicationes vtiles eſſe poſſunt, pro quibus etiam totidem additiones ſufficiunt, quæ multiplicationibus longè faciliores ſunt: verum quando non adhibetur columna, tot requiruntur multiplicationes, quot notæ ſcribendæ ſunt in quotiente, quæ poſſunt eſſe longe plures quam octo; his, adde quod columna diuiſoria expeditè exhibeatur in laminis Arithmeticis: quodque columnam adhibendo, ceſſet omnis difficultas, inueniendi quoties diuiſor contineatur in membro propoſito: quæ difficultas; præ cæteris omnibus moleſtam reddit diuiſionem, in qua columna non adhibetur: & ſubinde operantem non parum defatigat, vel etiam inducit in errorem, niſi maximè verſatus ſit in Arithmeticis operationibus. Verum nihil melius, quam ipſa praxis, docet, vtrum, vel quando, ex diuerſis diuiſionis praxibus, vna alteri

præ-

præferenda ſit; & quia pro diuerſis caſibus, atque diuerſis perſonis, diuerſæ praxes magis proſunt, addo hic alteram, quæ à priori non differt, niſi quod non adhibeat columnam diuiſoriam.

Tertium exemplum ſeptimæ praxis, in quo adhibetur diuiſio ſimplex propoſita in ſexta praxi.

Numerus diuidendus ſit 6 8 9 7, diuiſor ſit 39; vt hanc diuiſionem abſoluam, ita practicè diſcurro. Primum membrum eſt 68, in

```
6 8 9 7      (176 33/39
3 9           39
-----
2 9 9
2 7 3
-----
  2 6 7
  2 3 4
  -----
    3 3
```

quo diuiſor 39 tantum ſemel continetur, quare in quotiente ſcribo 1: & quia 1 ductum in diuiſorem 39 dat 39: numerum 39 ſubſcribo membro 68: facta ſubtractione relinquitur numerus 29, cui ſucceſſiue adſcribo notam 9 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 299: in hoc membro diuiſor 39 ſepties continetur; quare notam 7 ſcribo in quotiente, & quia 7 ductum in diuiſorem 39 dat 273, hunc numerum ſubſcribo membro 299: facta ſubtractione relinquitur numerus 26, cui ſucceſſiuè adſcribo notam 7 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 267: in hoc membro diuiſor 39 continetur ſexies, quare notam 6 ſcribo in quotiente: & quia 6 ductum in diuiſorem 39 dat 234, hunc numerum ſubſcribo membro 267: facta ſubtractione relinquitur numerus 33, cui ſucceſſiuè adſcribere non poſſum aliam notam numeri diuidendi, quia omnes eius notæ adhibitæ ſunt, atque adeo abſoluta eſt diuiſio: atque ex diuiſione productæ notæ Arithmeticæ erunt 176: diuiſionis reſiduum erit 33: adeoque propoſitæ diuiſionis productum erit $176\frac{33}{39}$.

Quartum exemplum ſeptimæ praxis, quod à tertio non differt, niſi penes ſcriptionem paulò magis compendiatam.

Numerus diuidendus ſit iterum 6 8 9 7 & diuiſore ſit 39; his poſitis, primum membrum eſt 68, in quo diuiſor ſemel continetur: itaque in quotiente ſcribo 1: & quia 1 ductum in diuiſorem 39 dat 39, atque inſuper 39 ſublatum ex membro 68 relinquit 29, hunc numerum 29 ſubſcribo membro propoſito; eritque nouum membrum 299, in quo diuiſor 39, continetur ſepties: quare in quotiente ſcribo 7, & quia 7 ductum in diuiſorem 39 dat 273, atque hic numerus ſublatus ex propoſito membro 299 relinquit 26: hunc nu-

merum 26 ſubſcribo membro adhibito , & nouum membrum erit 267 in quo diuiſor 39 continetur ſexies , quare in quotiente ſcribo notam 6 : & quia 6 ductum in diuiſorem 39 dat 234 , atque hic numerus ſubtractus ex membro propoſito 267 , relinquit 33: hunc numerum 33 ſubſcribo membro adhibito : quo facto nouum membrum haberi vlterius non poteſt adeoque diuiſio eſt abſoluta , atque ex diuiſione productæ notæ Arithmeticæ erunt 176 , & diuiſionis reſiduum erit 33 : quare productum ex propoſita diuiſione erit $176\frac{33}{39}$.

6 8 9 7	($176\frac{33}{39}$
2 9	39
2 6	
3 3	

Hactenus dictis de diuiſione , vtile exiſtimaui addere paucas reflexiones quæ ſubſequuntur .

Reflexio prima . Si aliquot poſtremæ notæ alicuius propoſiti diuiſoris , ſint cifræ , ſiue 0 ; negligi poterunt : dummodo etiam negligantur totidem poſtremę notæ numeri qui diuidendus proponitur, ſed tamen non negligantur in reſiduo diuiſionis . Exempli gratia numerus 632 diuidendus ſit per mumerum 200 , vtrobique negligendo duas poſtremas notas , reliquum ſuperiorem numerum 6 diuidendo per reliquum inferiorem numerum 2 , nota producta ex diuiſione erit 3 , reſiduum verò erit 32 , atque productum ex diuiſione erit $2\frac{32}{200}$.

Reflexio ſecunda . Apud non paucos expoſitores Arthmeticæ practicæ , magis vſitata inuenitur aliqua diuiſionis praxis , in qua membri adhibiti notæ delentur : quam praxes hactenus à nobis propoſitę ; prædictam tamen praxim putaui planè negligendam : quia ſi fortè inter operandum irrepat error aliquis , qui deprehendatur , vel ex eo quod productum ex multiplicatione maius ſit membro propoſito , vel quod reſiduum ſubtractionis maius ſit diuiſore : difficile eſt poſt deletas notas , errorem corrigere : quod in propoſitis à nobis praxibus difficultatem non habet .

Reflexio tertia . Quemadmodum multiplicatio maximè differt ab additione , vt monuimus in reflexione tertia capitis præcedentis: ita etiam diuiſio maximè differt à ſubtractione , tametſi per iteratas ſubtractiones inueniri poſſit productum diuiſionis . Impoſſibile eſt, vt productum ex ſubtractione numerorum vulgarium , non ſit minus ſuperiori genitore ſubtractionis : cuius partem exhibet productum ſubtractionis . Productum diuiſionis non ſemper eſt minus numero qui diuiditur : ſed ſubinde eſt minus , ſubinde æquale , ſubinde maius . Exempli gratia . 6 diuiſum per 2 producit 3 ; quo caſu productum ex diuiſione eſt minus numero qui diuiditur , 2 diuiſum

per

per 1 producit 2, quo caſu productum eſt æquale numero qui diuiditur. Præterea ex dicendis de diuiſione numerorum fractorum vulgarium; conſtabit, quod 2 diuiſum per $\frac{1}{4}$ producat 8; quo caſu productum eſt maius numero qui diuiditur. Hinc facilè colligitur, numerum A diuidere per numerum B, non eſſe idem, ac inuenire aliquam partem numeri A: etenim quælibet pars numeri A, neceſſariò eſt minor numero A; quare ſi numerum A diuidere per numerum B, eſſet idem ac inuenire aliquam partem numeri A: etiam productum ex diuiſione deberet eſſe minus numero qui diuiditur.

Appendix.

De operationum Arithmeticarum examine.

Operationum Arithmeticarum, atque hactenus propoſitarum: varia examina proponunt ſcriptores Arithmeticæ practicæ; illa tamen omnia quæ ab ipſis operationibus diuerſa ſunt, negligo, vt parum vtilia, atque errori obnoxia.

Legitimum additionis examen habetur ex ſubtractione: & viciſſim ex additione legitime infertur an in ſubtractione erratum ſit: etenim qualeſcunq; ſint numeri A & B, ſi numerus A, additus numero B, producat numerum C: etiam numerus B ſubtractus ex numero C, produci numerũ A, & etiã numerus A, ſubtractus ex numero C, producit numerum B. Exempli gratia, quia numerus 12 additus numero 14, producit numerum 26: etiam numerus 12 ſubtractus ex numero 26, producit numerum 14: & numerus 14, ſubtractus ex numero 26, producit numerum 12. Præterea qualeſcunque ſint numeri B & C, eo ipſo quod numerus B, ſubtractus ex numero C, producat numerum A; etiam numerus A, additus numero B, producit numerum C. Exempli gratia, quia numerus 12, ſublatus ex numero 26, producit numerum 14; etiam numerus 14, additus numero 12, producit numerum 26.

Pari modo legitimum multiplicationis examen, habetur à diuiſione, & viciſſim diuiſionis examen, ſubminiſtrat multiplicatio. Etenim qualeſcunque ſint numeri A & B, ſi numerus A ductus in numerum B, producit numerum C, etiam numerus C, diuiſus per numerum B, producit numerum A; & inſuper numerus C, diuiſus per numerum A, producit numerum B. Exempli gratia, quia numerus 7, ductus in numerum 4, producit numerum 28; etiam numerus 28, diuiſus per numerum 4, producit numerum 7;

& insuper numerus 28, diuisus per numerum 7, producit numerum 4. Rursus qualescunque sint numeri B & C, eo ipso quod numerus C, diuisus per numerum B, producit numerum A: etiam numerus A ductus in numerum B, producit numerum C. Exempli gratia, quia numerus 28 diuisus per numerum 4, producit numerum 7: etiam numerus 7 ductus in numerum 4, producit numerum 28.

Dubium esse posset circa examen diuisionis, quando productum constat ex numero integro, & fracto, vt accidere potest in diuisione integrorum numerorum. Exempli gratia productum ex numero 25, diuiso per numerum 7, producit $3\frac{4}{7}$, qui est numerus compositus ex integro, & fracto, & hactenus non egimus nisi de multiplicatione integrorum numerorum. Vt hoc vel simili casu diuisio examinari possit mediante multiplicatione, notare sufficit, quod si integer numerus productus ex diuisione, ducatur in diuisorem, atque huic producto addatur numerus scriptus supra lineolam, habebitur numerus circa quem est instituta diuisio. Exempli gratia, quia numerus 25; diuisus per numerum 7 producit numerum $3\frac{4}{7}$: etiam numerus 3 ductus in numerum 7, auctus numero 4, producit numerum 25: nam numerus 3, ductus in numerum 7, dat numerum 21: cui addendo numerum 4, scriptum supra lineolam, habetur numerus 25.

CAPVT VI.

Proponuntur aliqua, pro operationibus Arithmeticis instituendis circa numeros vulgares fractos.

Expositis operationibus Arithmeticis, quæ instituuntur circa integros numeros vulgares: venio ad alteram partem Arithmeticæ vulgar s, quæ docet easdem operationes instituere circa numeros, qui dicuntur fracti; in quem finem, imprimis nobis exponendum est, quomodo à prioribus discrepent posteriores. Numerus dicitur qui numerat, siue indicat vnitates, vnam scilicet, vel plures: etenim à nobis non minùs appellatur numerus, quod vnicam vnitatem indicat: quam quod indicat plures vnitates. Præterea vox vnitas, ita intelligenda est, vt significet idem, quod significat vox vnum, siue indiuiduum. Iam verò vnitas considerari potest vt genus est, siue illud præcisè quod dicitur vnum, hoc est indiui-

diui-

diuiduum consideratum præcisè vt indiuiduum est: atque hæc vnitas, appellatur vnitas generica, siue indiuiduum genericum. Vnitas generica restricta, dicitur vnitas specifica: etenim vnitas generica non subdiuiditur in diuersa vnitatum genera, sed tantum diuiditur in diuersas species vnitatum: atque generica vnitas, est aliquid idem in singulis vnitatibus specificis; sicut animal, est aliquid idem, in singulis animalium speciebus; hinc vnitas generica est eadem in binario, ternario, quaternario, vnitate totali, vnitate partiali, licet singulæ illæ vnitates specie differant inter se; singulæ enim sunt vnitates genericæ diuersimodè restrictæ: ipsa verò vnitas generica restricta, dicitur vnitas specifica: atque vnitas generica pluries eodem modo restricta constituit plures eiusdem speciei vnitates: ipsa vnitas generica pluries, sed diuersimodè restricta, constituit plures diuersæ speciei vnitates. Exempli gratia, vnitas hominum, siue vnus homo: est vnitas specie diuersa, ab vnitate Leonis, siue ab vno Leone; ex quo fit, quod vnus homo plus vno Leone, neque faciat duos homines, neque duos Leones. Similiter, vnitas hominum alborum, siue vnus homo albus: specie differt ab vnitate hominum nigrorum, siue ab vno homine nigro; ex quo fit, quod vnus homo albus plus vno homine nigro, neque faciat duos homines albos, neque duos homines nigros. Rursus, vnitas diuisa per quatuor, specie differt ab vnitate diuisa per tria; ex quo fit, quod vnitas diuisa per quatuor plus vnitate diuisa per tria, neque constituat duas vnitates diuisas per quatuor, neque duas vnitates diuisas per tria. Denique vniuersaliter vnitas generica diuersimodè restricta, atque contracta ad vnitates plus quam numero inter se differentes, constituit vnitates specificas diuersæ speciei. Ex quo satis patet, quid sint vnitates eiusdem, vel diuersæ speciei; quodque duæ vnitates erunt eiusdem speciei, si non differant quo ad restrictionem, sed solo numero ab inuicem discrepent; & quod duæ vnitates erunt diuersæ speciei, si differant quo ad restrictionem, atque magis quam numero ab inuicem discrepent. Differentiæ restringentes vnitatem genericam, atque illam contrahentes ad specificas vnitates vulgares: vel sunt restrictiones dependentes à diuisione, vel non dependentes à diuisione. Priores, compendiata scriptione indicat vulgaris Arithmetica, in qua, posteriores, vel productiori scriptione indicantur, vel habentur ex hypothesi: à qua, exempli gratia, dependet quod vnitas simplex, vnius, vel alterius speciei vnitates repræsentet: neque aliunde quam ex hypothesi potest cognosci, cuius speciei vnitatem significet vnitas simplex; hæc enim quantum est ex se, planè indifferens est, ad significandam cuiuslibet speciei vnitatem. Restrictio depen-

dependens à diuisione, compendiate indicatur per genitores talis diuisionis; sic quando dicitur vnitas diuisa per quatuor; exprimitur numerus habens restrictionem dependentem à diuisione, in qua superior genitor est vnum, inferior genitor est quatuor. Similiter quando dicitur, vnitas diuisa per tria; exprimitur numerus habens restrictionem dependentem à diuisione, in qua superior genitor est vnum, inferior genitor est tria. Pari modo quando dicitur, quatuor diuisum per duodecim: exprimitur numerus habens restrictionem dependentem à diuisione, cuius superior genitor est quatuor, inferior genitor est duodecim. Iam verò vulgaris numerus fractus dici potest numerus vulgaris habens restrictionem dependentem à diuisione. Vulgaris fracti numeri numerator, dicitur, superior genitor illius diuisionis à qua numerus fractus restrictionem habet. Vulgaris fracti numeri denominator, appellatur, inferior genitor illius diuisionis à qua numerus fractus restrictionem habet. Ex his constat quid sint vulgares fracti numeri, & quid intelligatur per numeratorem, aut denominatorem vulgaris fracti numeri. Vt vulgaris Arithmetica fractum numerum repræsentet compendiata scriptione: interposita lineola numeratori subscribit denominatorem. Exempli gratia, numeri A, B, C, D, singuli compendiata scriptione exhibent fractum numerum vulgarem; numerus A legitur vna quarta pars: vel vnum diuisum per quatuor: vel vna quaternarij vnitas; tribus istis diuersis modis legendi fractum numerum, nihil diuersum, sed idem planè significatur; primus magis vsitatus est in vulgari Arithmetica; secundus vsitatior est in nostra logistica; quodque primus à secundo non differat quo ad significationem, etiam apud eos, qui tradunt vulgarem Arithmeticam: satis patet, ex prima diuisionis praxi proposita cap. 5. quæ apud vulgaris Arithmeticæ expositores maximè vsitata est, & subsistere non posset, si duo priores modi legendi fractum numerum non significarent idem. De tertio modo legendi fractum vulgarem numerum paulo post recurrent aliqua. Numerus B, legitur, vna tertia pars: vel vnum diuisum per tria: vel vna ternarij vnitas. Numerus C, legitur, quatuor duodecimæ partes: vel quatuor diuisum per duodecim: vel quatuor duodenarij vnitates. Numerus E, legitur, quatuor primæ partes: vel quatuor diuisum per vnum; vel quatuor integræ vnitates. Ex his satis patet quomodo legi possint quiuis alij numeri vulgares fracti. Circa modum legendi numerum fractum E, aduertendum est, quod pars prima vnitatis ita debeat intelligi, vt idem significet, ac integra vnitas:

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{4}{12}$

E $\frac{4}{1}$

F 4

ex quo

ex quo fit, quod quatuor partes primæ vnitatis, non ſint aliquid diuerſum, à quatuor integris vnitatibus: & ſimiliter, quatuor diuiſum per vnum, non differat ab integro numero quatuor: ex quo vlteriùs ſequitur, nullum numerum habentem pro denominatore vnitatem vulgarem, ſignificare aliquid diuerſum, ab eo, quod ſignificatur per ſolum numeratorem; adeo vt numeri E, & F, diuerſa ſcriptione idem ſignificent: idemque planè ſignificetur, dicendo quatuor primæ partes, vel quatuor diuiſum per vnum, vel quatuor integræ vnitates, vel quatuor; immo hinc fit, quod integri numeri vulgares omnes cenſeantur pro denominatore habere vnitatem vulgarem; quem tamen denominatorem, vel exprimere, vel negligere, liberum eſt: quandoquidem per hoc non varietur numeri ſignificatio: & niſi in hac parte mecum conuenirent ſcriptores vulgaris Arithmeticæ, ſtatuere non poſſent, inter ſe ſpecie conuenire numeros vulgares, qui conueniunt quo ad denominatorem: illos verò ſpecie differre, qui differunt quo ad denominatorem; etenim numeros E, & F, hoc eſt quatuor primæ partes, & quatuor, etiam iuxta ipſos, ſunt numeri eiuſdem ſpeciei: & tamen non conuenirent quo ad denominatorem, ſi integer numerus F, ſiue quatuor, non intelligatur pro denominatore habere vnitatem ſimplicem, quæ eſt denominator numeri E. Si quæras, quare in vulgaribus numeris numeratorum inæqualitas non cauſet diuerſitatem ſpecificam, & tamen denominatorum inæqualitas cauſet diuerſitatem ſpecificam, inter duos vulgares numeros: atque exempli gratia vnum diuiſum per quatuor, & vnum diuiſum per tria, ſint numeri diuerſæ ſpeciei: & tamen vnum diuiſum per quatuor; & tria diuiſum per quatuor, ſint numeri eiuſdem ſpeciei: licet priores duo quo ad denominatores non magis differant, quam poſteriores differant quo ad numeratores. Reſpondeo vnum diuiſum per quatuor, ſignificare vnam quaternarii vnitatem, vel vnam quartam partem: & vnum diuiſum per tria, ſignificare vnam ternarij vnitatem, ſiue vnam tertiam partem: quandoquidem igitur quaternarij, & ternarii vnitates, ſint vnitates diuerſimodè reſtrictæ, atque inter ſe plus quam numero differentes: ex iis quæ paulò ante dicta ſunt de numeris ſpecie differentibus, manifeſtum eſt, prædictos duos numeros inter ſe ſpecie differre. Verum vnum diuiſum per quatuor, ſignificat vnam quaternarij vnitatem, vel vnam quartam partem: atque tria diuiſum per quatuor ſignificat tres quaternarij vnitates, ſiue tres quartas partes: ex quo patet duos iſtos numeros ſignificare vnitates eodem modo reſtrictas, atque inter ſe ſolo numero diuerſas: & conſequenter duos iſtos numeros non differre ſpecie. Ex hac reſponſione videtur ſatis

mani-

manifeſtum, quarę in numeris vulgaribus ſola inæqualitas numeratorum non cauſet diuerſitatem ſpecificam, & tamen ſola inæqualitas denominatorum cauſet diuerſitatem ſpecificam; dixi ſola inæqualitas numeratorum: etenim ſi duorum vulgarium numerorum numeratores, non tantum inæquales ſint, ſed amplius inter ſe differant: etiam numeri ſpecie differrēt, licet habeant eoſdem denominatores. Exempli gratia vnitas ternarij diuiſa per quatuor, ſpecie differt, ab vnitate binarij diuiſa per quatuor: vt ſatis patet ex paulò antè dictis de numeris ſpecie differentibus: & tamen duo iſti numeri eumdem denominatorem habent. Idem verum erit de vna libra diuiſa per quatuor vncias, & de vna vncia diuiſa per quatuor vncias; quis tamen negare poteſt, eiuſmodi numeros vulgares eſſe, vel à vulgari Arithmetica conſiderari. Hinc colliges, quod quando vulgaris Arithmeticæ expoſitores ſtatuunt, ſpecie conuenire numeros vulgares, qui conueniunt quo ad denominatorem: atque ſpecie differre numeros vulgares, qui differunt quo ad denominatorem: id intelligendum eſſe; de numeris vulgaribus expreſſis compendiata ſcriptione apud ipſos vſitata, atque inſuper adhibita in eadem hypotheſi: ſiue de numeris compendiate repræſentatis per ſolas vulgares vnitates ſimplices, atque ſuppoſito quod vnitas ſimplex ſemper idem ſignificet. Denique vt intelligatur, ſingulos modos legendi fractos numeros paulò ante propoſitos idem ſignificare, ſufficit intelligere numeros, repræſentatos productiori ſcriptione, quorum numerorum notitia, ſupponitur ab ijs qui vulgarem practicam Arithmeticam tradunt, & vix, aut ne vix quidem declaratur, ab illis, qui tradunt Arithmeticæ vulgaris practicæ, ſpeculatiua fundamenta; qua de re plura inuenies in poſtrema parte huius opuſculi.

Numerus fractus, & fractio, idem ſignificant: fractionis termini dicuntur, numerator, & denominator fractionis; hinc fractio, ſiue fractus numerus, minoribus terminis conſtare dicitur, quo fractio habet minorem numeratorem, & denominatorem,

Duæ factiones dicuntur æquales inter ſe, quæ æquales numeros ſignificant. Exempli Gratia fractiones A & B, ſunt fractiones æquales: quia ſignificant numeros æquales: vt ſatis patet ex ijs, quæ paulò ante diximus de ſignificatione fractionum.

A $\frac{4}{8}$

B $\frac{1}{2}$

Numerus vulgaris erit ſimplex, ſi vnicum habeat denominatorem; erit compoſitus, ſi duos, aut plures denominatores habeat. Exempli gratia numeri 4, item 120, item $\frac{4}{8}$, item $\frac{10}{2}$, ſinguli ſimplices ſunt; verum numerus $12\frac{3}{4}$ eſt compoſitus.

Duo numeri vulgares erunt eiuſdem ſpeciei, ſi non differant quo ad de-

ad denominatorem, & insuper, ex vi hypothesis, vnitates simplices à numeris indicatæ, non differant. Duo numeri vulgares erunt diuersæ speciei: si differant quo ad denominatorem, vel vnitates simplices à numeris indicatæ, ex vi hypothesis, differant inter se.

Mensura numeri A, dicitur quilibet numerus integer B, qui semel, vel sæpius sumptus; potest æquari numero A. Exempli gratia numeri 24, mensura est numerus 6: quia numerus 6 quater sumptus, æquatur numero 24: similiter numeri 24, mensura est 8: quia nnmerus 8 ter sumptus æquatur numero 24. Pari modo numeri 24. mēsuræ sunt numeri 12, 8, 6, 3, 1, 24; etenim numero 24, ęquatur numerus 12 bis sumptus itē numerus 6, quater sumptus, item numerus 3, octies sumptus; item numerus 1 vigesies quater sumptus; item numerus 24, semel sumptus. Verum numeri 24. mensura non est numerus 5: quia quinquies snmptus est maior quam 24: minus quam quinquies sumptus est minor quam 24.; Similiter numeri 24, mensura non est numerus 7: qui quater sumptus est maior quam numerus 24; minus quam quater sumptus est minor quam numerus 24.

Mensura duobus numeris A & C communis, est quiuis numerus, qui tam numeri A quam numeri C mensura est. Exemplii gratia numerorum 24 & 20, communis mensura est numerus 4: quia sexies sumptus æquatur numero 24: & etiam quinquies sumptus æquatur numero 20.

Duorum numerorum maxima communis mensura, dicitur, numerus, quo non datur maior, qui sit communis mensura, Exempli gratia numerorum 24, & 16, maxima communis mensura est numerus 8: quia numerus 8 est mensura communis numerorum 24, & 16: & non datur numerus maior, qui sit communis mensura: licet dentur alij numeri minores, qui singuli sint communis mensura numerorum 24 & 16: tales enim sunt 4, 2, 1. Similiter numerorum 24 & 19, maxima communis mensura est numerus 1: etenim numerus 1, est mensura communis numerorum 24 & 19:, et non datur alius: numerus maior qui sit communis mensura vtriusque illius numeri.

Problemata vtilia pro operationibus Arithmeticis, quæ instituuntur circa fractos numeros vulgares.

Singula problemata quæ hic proponuntur, vsitata sunt apud expositores vulgaris Arithmeticæ practicæ: licet enim singula non sint planè necessaria pro operationibus instituendis circa fractos nu-

meros vulgares: tamen maxime vtilia sunt, pro vulgari Arithmetica practica.

Problema I.

Inuenire maximam communem mensuram, propositorum duorum numerorum A & B, qui singuli sint numeri vulgaris integri.

MAiorem numerum A, diuidendo per minorem B, inueniatur huius diuisionis residuum C. Rursus præcedentis diuisionis diuisorem B, diuidendo per residuum C inueniatur nouum residuum D. Rursus præcedentis diuisionis: diuisorem C, diuidendo per residuum D, inueniatur nouum residuum E; atque hoc ordine continuentur diuisiones, donec pro residuo inueniatur 0, siue nihil; vltimæ huius diuisionis diuisor erit maxima communis mensura quæsita. Exempli gratia, propositi sint numeri 20 & 12, quorum maxima communis mensura inuenienda sit. Primo, 20 diuidendo per 12, habetur residuum 8. Rursus 12 diuidendo per 8; habetur residuum 4. Rursus, 8 diuidendo per 4, habetur residuum 0; itaque numerorum 20 & 12, maxima communis mensura est 4. Similiter propositi sint numeri 32 & 16, quorum maxima communis mensura inuenienda sit; 32 diuidendo per 16, habetur pro residuo 0; itaque numerorum 32 & 16, maxima communis mensura est 16.

Problema II.

Propositum fractum numerum vulgarem reducere ad minimos terminos.

PRimo per primũ problema, inueniatur maxima cõmunis mẽsura conueniens numeratori, & denominatori propositæ fractionis. Deinde propositę fractionis numerator, diuisus per inuentã maximã mensurã communem, producet nouum numeratorem, & etiam propositæ fractionis denominator, diuisus per inuentã maximam mensurã communem, producet nouum denominatorem. Deniq; nouus numerator, cum nouo denominatore, constituet fractionem quæsitam,

tam. Exempli gratia, proposita fractio sit $\frac{12}{20}$, numeratori 12, & denominatori 20 conueniens maxima communis mensura, est 4: deinde 12 diuisum per 4 producit nouum numeratorem 3; & 20 diuisum per 4 producit nouum denominatorem 5: adeoque inuenta fractio erit $\frac{3}{5}$: quæ fractio æquiualet propositæ fractioni $\frac{12}{20}$: neque possibilis est vlla fractio quæ æquiualeat propositæ fractioni, & constet minoribus terminis quam inuenta fractio.

Problema III.

Propositos duos fractos numeros vulgares reducere ad communem denominatorem.

PRimo, numerator primæ fractionis propositæ, ductus in denominatorem secundæ fractionis propositæ, dabit primum numeratorem nouum; deinde, secundæ fractionis propositæ numerator, ductus in denominatorem primæ fractionis propositæ, dabit secundum numeratorem nouum. Tertio primæ fractionis propositæ denominator, ductus in denominatorem secundæ fractionis propositæ, dabit nouum denominatorem communem. Denique primus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, constituet nouam fractionem, æquiualentem primæ fractioni propositæ; & secundus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, constituet nouam fractionem æquiualentem secundæ fractioni propositæ: atque adeo habebuntur duæ nouæ fractiones, habentes communem denominatorem, atque æquiualentes propositis duabus fractionibus. Exempli gratia proposita prima fractio sit $\frac{2}{3}$, secunda fractio proposita sit $\frac{4}{5}$. Quoniam 2 ductum in 5, dat 10: primus numerator nouus erit 10. Et quia 4 ductum in 3, dat 12: secundus numerator nouus erit 12. Præterea cum 3 ductum in 5, dat 15; communis denominator erit 15. Denique prima noua fractio erit $\frac{10}{15}$; secunda noua fractio erit $\frac{12}{15}$; atque nouæ duæ fractiones exhibebunt propositas duas fractiones, reductas ad communem denominatorem.

Problema IV.

Propositum fractum numerum vulgarem, reducere ad alium fractum numerum, habentem datum denominatorem, in casu in quo id fieri potest.

PRopositæ fractionis numerator, ductus in datum denominatorem, producet aliquem numerum, qui diuisus per denominatorem propositæ fractionis, dabit nouum numeratorem: nouus numerator cum dato denominatore, constituet quæsitam fractionem. Exempli gratia, proposita fractio sit $\frac{4}{6}$: datus denominator sit 3. Quoniam, 4 ductum in 3, dat 12: & insuper 12 diuisum per 6, dat 2: nouus numerator erit 2: & noua fractio erit $\frac{2}{3}$; quæ habet datum denominatorem 3, & etiam æquiualet propositæ fractioni,

Si fieri non possit quod præscribitur pro solutione problematis, casus propositus censetur impossibilis. Exempli Gratia, proposita fractio sit $\frac{4}{6}$: datus denominator sit 5; hoc casu, 4 ductum in 5 dat 20: sed 20 diuisum per 6, non dat integrum numerum: adeoque fieri non potest quod præscribitur in solutione problematis; quare casus propositus censetur impossibilis, & proposita fractio $\frac{4}{6}$, non potest reduci ad aliam fractionem, quæ habeat denominatorem 5.

CAPVT VII.

De operationibus Arithmeticis, quæ instituuntur circa fractos numeros vulgares.

SVpposita intelligentia eorum quæ præcedenti capite dicta sunt de numeris vulgaribus fractis: & notitia operationum Arithmeticarum, quæ instituuntur circa integros vulgares numeros; breuiter propono, quomodo Arithmeticæ operationes absoluantur, quando ex datis pro operatione numeris, aliquis fractus sit, atque vulgaris; operationum singularum definitiones non repe-

repeto, quandoquidem illæ à nobis propositæ sint in præcedentibus capitibus. Præterea vnico capite complector operationes omnes, quæ circa vulgares fractos numeros instituuntur: faciles enim sunt, neque in ipsis superest specialis difficultas, præsupposita notitia eorum quæ hactenus tradidimus. Obseruandum hic est, quod nusquam expresse agamus de operationibus vulgaris Arithmeticæ, in casu, in quo aliquis ex datis numeris est compositus, ex integro & fracto, aut diuersis fractis numeris: quandoquidem tali casu, compositus numerus prius reduci possit ad alium æquiualentem non compositum: atque ad hoc abunde sufficiant pauca superioris capitis problemata.

De Additione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum, quod oritur ex Additione duorum, aut plurium numerorum vulgarium, quorum aliquis sit fractus numerus. Primo si singuli numeri dati non habeant communem denominatorem, per problema 3. capitis 6. reducantur ad alios numeros, habentes communem denominatorem. Quo facto, numeratores simul additi dabunt nouum numeratorem qui cum communi denominatore, constituet fractum numerum productum ex proposita additione.

Exempli Gratia, si fractus numerus $\frac{4}{7}$, addendus sit alteri fracto numero $\frac{3}{5}$: hi numeri, per problema 3. capitis 6. reducti ad alios, habentes communem denominatorem, erunt $\frac{20}{35}$ & $\frac{21}{35}$: numeratores 20 atque 21 simul additi, producunt 41: quare numerus productus, ex proposita additione erit $\frac{41}{35}$: adeoque verum erit quod $\frac{4}{7}$ plus $\frac{3}{5}$ producant $\frac{41}{35}$; Similiter si integer numerus 4, addendus sit fracto numero $\frac{3}{5}$: hi numeri per problema 3 capitis 6 reducti ad alios, habentes communem denominatorē erũt, $\frac{20}{5}$ & $\frac{3}{5}$: numeratores 20 & 3 simul additi, producunt 23: quare numerus productus ex proposita additione erit $\frac{23}{5}$; atque adeo verum erit, quod 4 plus $\frac{3}{5}$, producat $\frac{23}{5}$.

Non erit inutile hic reflectere, quod pro additione numerorum integrorum vulgarium, præcisè requiratur, atque sufficiat, additio numeratorum manente eodem denominatore; quod verum est, quia omnes numeri vulgares integri, eumdem habent denominatorem. Similiter, quoties fracti numeri habent eumdem, siue communem denominatorem: pro illorum additione, præcisè requiritur, & sufficit, additio numeratorum, manente eodem denominatore. Si verò

verò fracti numeri habeant diuersum denominatorem, tunc priùs per problema 3. capitis 6. reducendi sunt ad alios numeros, prioribus æquiualentes, qui habeant eumdem, siue communem denominatorem; hæc reductio ad communem denomiratorem necessaria est, vt haberi possit simplex numerus, æquiualens datis duobus numeris: simplex enim numerus non nisi vnius speciei vnitates indicat, & per vnius speciei vnitates, Exempli Gratia (in moneta Romana, in qua vnum scutum, æquiualet 10 Iulijs) per Iuliorum vnitates, exprimi non potest numerus, qui indicet aggregatum ex quatuor scutis & 5 iulijs: nisi prius 4 scuta reducantur ad iulios: quandoquidem 4 scuta plus 5 iulijs, non constituant summam æquiualentem 9 iulijs; quia tamen 4 scuta, æquiualent 40 iulijs: adeoque 4 scuta reducta ad iulios constituunt 40 iulios: etiam 4 scuta plus 5 iulijs, producunt 45 iulios: eritque verum, quod aggregatum ex 4 scutis & 5 iulijs, æquetur, siue æquiualeat, 45 iulijs: & simplex numerus 45 iuliorum, indicabit aliquid æquiualens aggregato ex 4 scutis & 5 iulijs.

De Subtractione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum quod oritur ex Subtractione, in qua minor numerus, aufertur ex maiori numero, quando vterque vulgaris est, atque vnus ex illis duobus numeris est fractus. Primo, si singuli dati numeri non habeant communem denominatorem, prius per problema 3. capitis 6. reducantur ad alios numeros, habentes communem denominatorem. Quo facto, numerator noui inferioris numeri, subtractus ex numeratore noui superioris numeri, dabit nouum numeratorem: qui cum communi denominatore constituet productum propositæ subtractionis.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$: subtrahendus sit ex numero $\frac{3}{5}$: hos numeros reducendo ad alios, qui communem denominatorem habeant: pro dato superiori numero $\frac{4}{7}$, habebitur nouus superior numerus $\frac{21}{35}$: & pro dato inferiori numero $\frac{3}{5}$, habebitur nouus inferior numerus $\frac{20}{35}$. Deinde noui atque inferioris numeri, numerator 20, subtractus, ex noui atque superioris numeri numeratore 21, producit 1; quare numerus productus ex proposita subtractione, erit $\frac{1}{35}$: adeoque verum erit, quod $\frac{4}{7}$ minus $\frac{3}{5}$, producant $\frac{1}{35}$. Similiter, si ex integro numero 4, subtrahi debeat fractus numerus $\frac{3}{5}$; hos numeros reducendo ad alios, qui communem denominatorem habeant: pro dato superiori numero 4, habebitur nouus superior numerus $\frac{20}{5}$: & pro dato inferiori numero $\frac{3}{5}$, habebitur idem numerus

infe-

inferior, nimirum numerus $\frac{3}{5}$. Deinde noui, atque inferioris numeri, numerator 3: subtractus ex noui, atque superioris numeri numeratore 20; producit 17; quare, numerus productus ex proposita subtractione, erit $\frac{17}{5}$.

Quemadmodum paulo ante circa additionem, ita hic circa subtractionem vtile erit reflectere: quod pro subtractione numerorum integrorum vulgarium, præcisè requiratur, atque sufficiat subtractio numeratorum, manente eodem, siue communi denominatore, qui in omnibus integris numeris est vnitas; & similiter pro subtractione numerorum fractorum vulgarium, præcisè requiritur, & sufficit, subtractio numeratorum, manente communi denominatore: quoties dati numeri fracti habent communem denominatorem. Quoties verò dati fracti numeri non habent denominatorem communem, prius per problema 3 cap. 6 reducendi sunt ad alios numeros prioribus æquiualentes, qui habeant denominatorem communem: quandoquidem vulgaris Arithmetica non tradat praxim in qua immediatè subtrahatur numerus aliquis vnius speciei ex alterius speciei numero.

De Multiplicatione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum, quod oritur ex multiplicatione duorum numerorum, quando vterque ex illis numeris vulgaris est, atque ex duobus, saltem vnus est fractus. Primo numeratores datorum numerorum multiplicati, dant nouum numeratorem: & etiam denominatores multiplicati dant nouum denominatorem; denique nouus numerator cum nouo denominatore, constituit productum ex proposita multiplicatione.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$ ducendus sit in numerum $\frac{3}{5}$; numerator 4 ductus in numeratorem 3, dabit nouum numeratorem 12: & etiam denominator 7, ductus in denominatorem 5, dabit nouum denominatorem 35; quare numerus $\frac{12}{35}$ erit productum propositæ multiplicationis; adeoque verum erit, quod numerus $\frac{4}{7}$ ductus in numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{12}{35}$. Similiter, si integer numerus 4 ducendus sit in integrum numerum $\frac{3}{5}$, numerator integri numeri propositi, qui est 4, ductus in numeratorem fracti numeri qui est 3, dabit nouum numeratorem 12: & propositi integri numeri denominator, qui est 1, ductus in propositi fracti numeri denominatorem, qui est 5, dabit nouum denominatorem 5: adeoque productum ex proposita

ſita multiplicatione, erit numerus $\frac{12}{5}$; quare verum erit, quod numerus 4 ductus in numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{12}{5}$.

Ad pleniorem propoſitæ multiplicationis intelligentiam, vtile erit reflectere ad definitionem multiplicationis omnibus vulgaribus numeris communem, quam definitionem habes capite 4. vbi etiam monuimus; pro multiplicatione nihil referre, an dati numeri ſint eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei; quæ cauſa eſt, quod pro tradita hic multiplicatione, non requiratur problema 3. capitis 6. additioni atque ſubtractioni inſeruiens.

De Diuiſione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum ex diuiſione duorum numerorum vulgarium, quorum aliquis ſit fractus numerus. Primo aſſumatur nouus numerus, qui pro numeratore habeat denominatorem diuiſoris dati, atque pro denominatore habeat numeratorem diuiſoris dati: ſiue, quod idem eſt, diuiſor inuertatur. Deinde inueniatur productum ex numero diuidendo ducto in nouum atque aſſumptum numerum; ſic enim habebis productum propoſitæ diuiſionis.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$ diuidendus ſit, per numerum $\frac{3}{5}$. Primo numerus aſſumendus erit $\frac{5}{3}$; deinde quia productum ex numero $\frac{4}{7}$ ducto in $\frac{5}{3}$, eſt numerus $\frac{20}{21}$: etiam productum propoſitæ diuiſionis, erit $\frac{20}{21}$: atque adeo verum erit, quod numerus $\frac{4}{7}$ diuiſus per numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{20}{21}$. Similiter, ſi integer numerus 4 diuidendus ſit per $\frac{3}{5}$: numerus aſſumendus erit $\frac{5}{3}$; deinde quia productum ex numero 4 ducto in $\frac{5}{3}$ eſt numerus $\frac{20}{3}$: etiam productum propoſitæ diuiſionis, erit $\frac{20}{3}$: adeoque verum erit, quod 4 diuiſum per $\frac{3}{5}$, producat $\frac{20}{3}$. Pari modo ſi numerus $\frac{3}{5}$ diuidendus ſit per numerum 4: numerus aſſumendus erit $\frac{1}{4}$: & productum ex numero $\frac{3}{5}$ ducto in $\frac{1}{4}$, producit $\frac{3}{20}$; quare numerus $\frac{3}{5}$ diuiſus per numerum 4, producit $\frac{3}{20}$.

Præcedentes praxes additionis, ſubtractionis, & multiplicationis, numerorum vulgarium fractorum, ſatis immediatè patent ex ipſis definitionibus: praxis hic allata pro diuiſione, non immediatè patet ex diuiſionis definitione; immo ſatis difficilis eſt, ſed tamen non difficulter deducitur ex ijs, quæ idea Logiſticæ demonſtrata ſunt, ex quibus breuiter, ſed Logiſtico diſcurſu demonſtratam exhibeo prædictam praxim.

Qua-

Qualescunque numeros repræsentent litteræ A, B, C, D.

Dico $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$.

Constructio. Littera E, repræsentet productum ex $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D}$.

Demonstratio. Per constructionem $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = E$; ergo ex conceptu diuisionis exposito præcedenti capite 5. etiam $\frac{C}{D}$ *in* $E = \frac{A}{B}$: sed per theor. 1. partis 4. Ideæ Logisticæ, $\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{1}{1}$: ergo $\frac{C}{D}$ *in* $E = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{1}{1}$: ergo, per axioma 3. partis 4, Ideæ Logisticæ; $\frac{C}{D}$ *ad* $\frac{1}{1} = \frac{A}{B}$ *ad* E: sed, per theor. 21. partis 4. Ideæ Logisticæ, $\frac{C}{D}$ *ad* $\frac{1}{1}$ = C *ad* D: ergo, $\frac{A}{B}$ *ad* E = C *ad* D: atqui, per coroll: theor: 4. part. 4. Ideę Logisticę etiã $\frac{C}{C}$ *ad* $\frac{D}{C}$ = C *ad* D: ergo, $\frac{A}{B}$ *ad* E = $\frac{C}{C}$ *ad* $\frac{D}{C}$: ergo, per axioma 3 partis 4. Ideæ Logisticæ, E *in* $\frac{C}{C} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$: sed, per theor. 1. partis 4. Ideæ Logisticæ, E *in* $\frac{C}{C}$ = E: ergo E = $\frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$: atqui per constructionem, etiam $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D}$ = E: ergo $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$. Quod erat demonstrandum.

CAPVT VIII.

De Regula aurea.

Regula quam hic proponimus, ab expositoribus practicæ, atque vulgaris Arithmeticæ, appellatur aurea: propter eximios, & maximè vtiles vsus quos habet; aliter etiam appellatur regula trium; vel regula proportionum; quia ex tribus datis numeris, docet inuenire quartum proportionalem.

Exempli gratia, supposito quod dati, siue propositi sint tres numeri, quorum primus sit A, secundus B, tertius C, docet regula aurea inuenire quartum numerum D, ita vt numerus tertius C, ad quartum numerum

D, habeat eamdem proportionem, quam habet primus numerus A, ad secundum numerum B. Vbi aduertendum, quod si productum ex primo numero A, ducto in quartum numerum D, sit æquale producto ex secundo numero B, ducto in tertium numerum C; etiam tertius numerus C, ad quartum numerum D, habebit eamdem proportionem quam primus numerus A, habet ad secundum numerum B. Verum si productum ex primo numero A, ducto in quartum numerum D, non sit æquale producto ex secundo numero B, ducto in tertium numerum C; tunc tertius numerus C, ad quartum numerum D, non habebit eamdem proportionem quam primus numerus A, habet ad secundum numerum B, quod hic notasse satis erit, pro sufficienti intelligentia, & vsu regulæ aureæ quam proponimus; siquidem ex allata productorum æqualitate infallibiliter inferatur proportionum identitas, siue æqualitas, quæ per regulam auream inquiritur. Exponere quid sit duas proportiones esse easdem, siue æquales difficile est, & legitime exponi non potest: nisi præmissa legitima definitione proportionis; quandoquidem intelligi non possit, quid sit duas proportiones inter se æquari: nisi intelligatur, quid sit proportio; iam verò ne quidem apud eos qui tractant de speculatiua Arithmetica, sufficienter declaratum inuenio quid sit illud, quod per vocem proportio intelligendum sit apud Arithmeticos: atque adeo, saltem ego non percipio, quomodo desi possint legitime exponere, quid sit duas proportiones esse easdem, vel æquales. Hac de re, qui plura desiderat, consulere poterit partem quartam Ideæ Logisticæ.

Vt ex datis tribus numeris, quorum primus sit A, secundus B, tertius C, inueniatur quartus proportionalis numerus D: atque ita absoluatur regula aurea, de qua hic agitur. Primo, secundus numerus B, ducatur in tertium numerum C. Deindè ex hac multiplicatione inuentum productum, diuisum per primum numerum A, dabit quartum numerum D, quæsitum.

Exempli gratia, supposito quod primus numerus A sit 2, secundus numerus B sit 5, tertius numerus C sit 6: secundum numerum 5 ducendo in tertium numerum 6: habebitur productum 30: quod productum diuidendo per primum numerum 2, habebitur numerus 15: qui erit quartus proportionalis quæsitus, siue inueniendus per regulam auream; eritque verum: quod tertius numerus 6, ad inuentum quartum numerum 15, habeat eamdem proportionem, quam primus numerus 2, habet ad secundum numerum 5: quod verum esse, legitime inferes ex eo quod primus numerus 2, ductus in quartum numerum 15, producat 30: & etiam secundus numerus 5, ductus in tertium numerum 6, producat 30.

Præsertim pro quæstionibus practicis, quæ mediante regula aurea

rea soluuntur, aduertendum est: subinde non satis apparere quis ex datis, siue propositis tribus numeris, dici debeat primus, secundus, aut tertius: quod tamen necesse est, pro vsu regulæ aureæ. Vt igitur hoc cognoscatur, ex ipsa quæstione practica quæ proponitur, iuuabunt subsequentes reflexiones.

Reflexio prima. In quauis practica quæstione quæ mediante regula aurea soluitur, proponuntur tres numeri: ex quibus duo sunt eiusdem speciei, reliquus specie conuenit cum numero inueniendo. Deinde, ex datis duobus numeris qui sunt eiusdem speciei vnus habet annexam quæstionem, alter non habet annexam quæstionem. Exempli gratia, semper æquali velocitate ambulando, 3 horis conficio 7 milliaria; 12 horis quot milliariaria conficiam? in proposita quæstione agitur de quatuor numeris, ex quibus tres numeri cogniti sunt, atque proponuntur in ipsa quæstione; quartus inueniendus est: atque de illo quæritur in quæstione. Præterea, ex tribus numeris datis, siue propositis in quæstione: duo indicant horas quibus iter conficitur: & sunt numeri eiusdem speciei; reliquus indicat milliaria confecta, & specie conuenit cum numero de quo quæritur. Iam vero, ex duobus eiusdem speciei numeris propositis, ac datis, vnus, 12, horas indicans, habet annexam quæstionem: quæritur enim de milliaribus conficiendis 12 horis; alter, 3 horas indicans, non habet annexam quæstionem: quia non quæritur de milliaribus conficiendis 3 horis; quare in proposita quæstione, numerus 3 horarum, & numerus 12 horarum, sunt numeri dati siue propositi atque eiusdem speciei: & numerus 7 milliariorum, specie conuenit cum numero de quo quæritur. Denique numerus 12 horarum, habet annexam quæstionem: & numerus 3 horarum, non habet annexam quæstionem. Idem accidit in reliquis quæstionibus quæ soluuntur mediante regula aurea.

Reflexio secunda. In quæstionibus practicis quæ soluuntur mediante regula aurea, possunt occurrere duo casus inter se diuersi. Primus casus est, quando incrementum numeri habentis annexam quæstionem, requirit incrementum numeri quæsiti. Secundus casus est, quando incrementum numeri habentis annexam quæstionem requirit decrementum numeri quæsiti. Ad quem ex his duobus casibus pertineat quæuis proposita quæstio per regulam auream soluenda, ex ipsius quæstionis consideratione satis commodè infertur. Exempli gratia propositæ sint duæ quæstiones; prima sit illa quæ in præcedenti reflexione, pro exemplo proposita est. Secunda quæstio sit, 3 homines 7 diebus consumunt annonam, 12 hohomines quot diebus annonam consument? In prima quæstione,

H 2 nume-

numerus 12 horarum, est ille, qui annexam habet quæstionem: & numerus milliariorum conficiendorum est ille de quo quæritur; quoniam verò cæteris paribus manifestum est, pluribus horis plura milliaria confici: etiam patet, quod crescente numero 12 horarum, debeat crescere numerus milliariorum conficiendorum: adeoque primam quæstionem pertinere ad primum casum. In secunda quæstione, numerus 12 hominum, habet annexam quæstionem: & numerus dierum quibus annona consumitur, est numerus de quo quęritur; quoniam vero, cæteris paribus manifestum est, à pluribus hominibus, paucioribus diebus annonam consumi: etiam patet, quod crescente numero 12 hominum, debeat decrescere numerus dierum quibus annona consumitur; adeoque secundam quæstionem pertinere ad secundum casum.

Reflexio tertia. Vt sciatur, quis ex tribus numeris datis in aliqua practica quæstione, quæ mediante regula aurea soluitur, debeat dici primus, vel secundus, vel tertius. Primo aduertendum est, ad quem ex duobus casibus in secunda reflexione propositis pertineat quæstio; etenim si quæstio pertineat ad primum casum, primus numerus erit ille ex datis duobus eiusdem speciei numeris, qui non habet annexam quæstionem: verum si quæstio pertineat ad secundum casum, primus numerus erit ille ex datis duobus numeris eiusdem speciei, qui annexam habet quæstionem. Deinde cognito quis ex datis tribus numeris primus appelletur, liberum est, ex reliquis duobus vnum pro libitu secundum, & alterum tertium appellare. Exempli gratia, quæstio prima paulò ante proposita, pertinet ad primum casum: duo numeri eiusdem speciei, in ista quæstione propositi, sunt 3 horæ, & 12 horæ: atque ex his duobus numeris eiusdem speciei, numerus 3 horarum, non habet annexam quæstionem, qui propterea primus erit; reliqui numeri in quæstione propositi sunt 7 milliaria, & 12 horæ: eritque liberum, numerum 7 milliariorum secundum dicere, & numerum 12 horarum tertium appellare; vel certè numerum 12 horarum vocare secundum & numerum 7 hominum dicere tertium. Similiter quia secunda quęstio paulò ante proposita pertinet ad secundum casum: ex datis duobus numeris eiusdem speciei, quorũ vnus, 3 homines, alter 12 homines indicat: numerus 12 hominum annexam habens quæstionem: primus erit: & liberum est numerum 7 dierum dicere secundum, atque numerum 3 hominum vocare tertium: vel certè numerum 3 hominum secundum, & numerum 7 dierum tertium appellare.

Non ignoro apud scriptores Arithmeticæ practicæ vsu receptam esse, regulæ auræ distinctionem; in directam, & euersam: hanc di-

stin-

ſtinctionem neglexi, vt inutilem pro noſtra methodo; in qua regula aurea deberet dici directa, quando primus numerus hoc eſt numerus per quem multiplicationis productum diuidendum eſt, non habet annexam quæſtionem; euerſa dici deberet, quando primus numerus, ſiue numerus per quem multiplicationis productum diuidendum eſt, habet annexam quæſtionem; verum commodius videtur, in diuerſis caſibus diuerſum ex tribus datis numeris primum appellando, præſcribere, vt ſemper productum ex multiplicatione ſecundi, & tertij numeri, per primum diuidatur: quam pro diuerſis illis caſibus, ſubdiuidere regulam auream, in directam, & euerſam, atque pro ſingulis veluti diuerſam ſolutionem afferre.

Demõſtratio regulæ aureæ, immediatè patet ex theoremate 3. partis 4. ideæ logiſticę, ex quo theoremate etiam conſtat duplex alius modus inſtituendi regulam auream: primus eſt, ſecundum numerum prius diuidere per primum, atque huius diuiſionis productum ducere in tertium numerum. Secundus modus eſt, tertium numerum prius diuidere per primum, atque huius diuiſionis productum ducere in ſecundum numerum. Verum hi duo modi ſubinde minus commodi ſunt pro praxi; vtriuſque tamen modi breue exemplum propono, ſupponendo ex datis tribus numeris primum eſſe 4: ſecundum eſſe 8: tertium eſſe 12; hoc poſito, iuxta expoſitam prius regulam auream, 8 ducendo in 12 producitur 96: qui numerus diuiſus per 4 producit 24: adeoque quartus numerus inuentus erit 24. Iuxta primum modum hic inſinuatum, numerum 8 diuidendo per 4 producitur numerus 2: qui ductus in 12 producit 24: adeoque iterum numerus inuentus erit 24. Iuxta ſecundum modum hic inſinuatum numerum 12 diuidendo per 4, producitur numerus 3: qui ductus in numerum 8, producit 24: quare rurſus, vt prius numerus inuentus erit 24. Ex propoſito exemplo apparet: ſemper eumdem numerum produci, ſiue modo prius propoſito, ſiue aliquo ex duobus modis hic inſinuatis inſtituatur regula aurea: idem verum eſſe in quibuſuis alijs numeris, praxis docere poteſt; quare verũ ſit, docet ſupra citatũ theorema: in quo vniuerſaliter demõſtratur, de quibuslibet numeris verũ eſſe, quod hic in vno exẽplo verum eſſe declarauimus.

Non erit inutile hic notare circa tres numeros datos pro regula aurea tres caſus diuerſos poſſe occurrere; primus eſt quando ex datis tribus numeris primus eſt vnitas ſimplex; ſecundus eſt quando ex datis tribus numeris ſecundus, vel tertius eſt vnitas ſimplex: tertius caſus eſt quando nullus ex datis tribus numeris eſt vnitas ſimplex, In primo caſu pro regula aurea nihil requiritur præter multiplicationem. In ſecundo caſu nihil requiritur præter diuiſionem. In

tertio

tertio caſu requiritur multiplicatio, & diuiſio. Hinc, quam verum eſt, regulam auream inſtituere, aut adhibere, nihil aliud eſſe, quam datis tribus numeris quartum proportialem inuenire: tam verè dici poſſet, vnum numerum in alterum ducere, nihil aliud eſſe, quam datis tribus numeris (quorum primus ſit vnitas reliqui duo ſint qui proponuntur pro multiplicatione) inuenire quartum proportionalem. Similiter dici poſſet, vnum numerum per alterum diuidere, nihil aliud eſſe, quam datis tribus numeris (quorum ſecundus, vel tertius eſt vnitas, & reliqui duo ſint illi qui proponuntur pro diuiſione) inuenire quartum proportionalem, Ex quo tandem licebit inferre nullam praxim eſſe poſſibilem, quæ ſufficiat, vt datis quibuslibet tribus numeris, inueniatur quartus proportionalis: & tamen non ſufficiat ad inueniendum productum, quod per multiplicationem, aut diuiſionem, oritur ex quibuslibet duobus numeris propoſitis.



LOGISTICÆ DERIVATIO EX VVLGARI ARITHMETICA.

ARGVMENTVM.



N superioribus capitibus exposuimus eam partem practicæ, atque vulgaris Arithmeticæ, quam in scribenda Logistica aliunde cognitam supposuimus; quare transeo ad alteram præsentis opusculi partem: in qua nobis ostendẽdum est, quomodo exposita vulgaris & practica Arithmetica, conueniat cum Arithmetica practica exposita in primo libro nostræ Logisticæ: vel certe ab illa differat: quod vt clarius atque intelligibilius proponam, præsentem materiam diuido in varias reflexiones; vt sic commodius, atque per partes ostendam: Logisticæ nostræ practicam Arithmeticam, nihil aliud esse, quam Arithmeticam vulgarem quodammodo ampliatam, atque reductam ad maiorem vniuersalitatem: & propemodum singula, quæ practicæ nostræ Logisticæ propria sunt, deriuari ab ijs, quæ vsu recepta inueniuntur in vulgari, practica Arithmetica, superius declarata.

REFLEXIO I.

Quemadmodum vulgaris Arithmetica, ita etiam Logistica practica, quatuor operationibus innititur: & tota consistit in vario vsu istarum operationum. Præterea, fere eadem sunt, præcipua capita, quibus continetur, tum vulgaris, tum Logisticæ nostræ Arithmetica practica.

NOn nego, radicum extractionem ita considerari posse, vt constituat operationem Arithmeticã diuersam à diuisione: immo quia hoc

hoc modo videbatur considerari ab expositoribus Arithmeticæ practicæ: quinque operationes Logisticas enumero capite 2. libri 1. Logisticæ: nolebam enim absque vlla necessitate aduersari illorum placitis, quorum doctrinam supponebam. Deinde operationum diuersitatem desumendo potius ex modo operandi, aut præscriptis requisitis pro operatione, quam ex ipsis operationum definitionibus: quinque potius, quam quatuor operationes Arithmeticæ forent admittendæ; verum, si vt nobis placet, ex ipsis definitionibus, de operationum Arithmeticarum diuersitate statuendum sit: admissis nostris definitionibus, dici non potest, radicis extractionem, esse operationem Arithmeticam diuersam à diuisione, qua de re consuli posset caput 8. partis secundæ Ideæ Logisticæ: præsuppositis tamen definitionibus, à nobis propositis in quarto vel quinto capite huius opusculi. Præterea licet radicum extractio spectet ad eam operationem, quæ diuisio dicitur: atque etiam ad vulgarem, & practicam Arithmeticam pertineat: tamen in superioribus capitibus nusquam ago de radicum extractione: quandoquidem de illa satis fuse egerim in appendice libri primi Logisticæ: eamque non supposuerim aliunde cognitam.

Vniuersim igitur quatuor vulgaris Arithmeticæ operationes inueniuntur: nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio: in ordinato vsu istarum operationum consistit vniuersa Arithmetica practica; quippe quæ aliud non docet, quam ex datis aliquibus numeris, inuenire alios numeros, qui ex datis numeris producuntur, per vnam, vel certè per plures ex quatuor enumeratis operationibus Arithmeticis. Hinc fit, quod practica Arithmetica (exposita numerorum compendiata scriptione) doceat quatuor operationes Arithmeticas: ac postea nihil tradat, nisi præcepta quæ dirigunt ordinem seruandum inter diuersas operationes, quando per plures Arithmeticas operationes inueniendus est aliquis numerus; neque vsquam doceat inuenire numerum, nisi mediante vna, vel pluribus operationibus Arithmeticis: quod eodem modo verum est, siue sermo sit de vulgari Arithmetica, siue sermo sit de illa Arithmetica quæ traditur in nostra Logistica. Hoc vt melius intelligatur, prodesse posset reflexio tertia, quæ proponitur capite quarto partis secundæ Ideæ nostræ Logisticæ.

Præcipua capita quibus continetur, tum vulgaris, tum etiam Logisticæ nostræ Arithmetica practica: dici possunt illa quæ sequuntur.

Primo, numeros compendiata, & commoda scriptione repræsentare; atque ita repræsentatos legere. Hac de re agitur capite primo

mo, & sexto huius opusculi: & etiam capite primo nostræ Logisticæ.

Secundo. Operationum Arithmeticarum producta inuenire, aut repræsentare compendiata, & commoda scriptione. Hac de re agitur capite secundo, tertio, quarto, quinto, atque septimo huius opusculi: & capite secundo nostræ Logisticæ.

Tertio Compendiata, sed propter aliquas circumstantias minus commoda scriptione repræsentatos numeros, reducere ad alios æquiualentes numeros, commodiori scriptione repræsentatos. Hac de re agitur in problematibus capitis sexti, & sparsim in alijs capitibus huius opusculi, prætérea in singulis ferè Logisticæ nostræ capitibus, quæ secundum subsequuntur, atque præcedunt octauum, aut septimum.

Quarto. Ex datis aliquibus numeris, inuenire alios, qui ex datis producuntur per plures operationes Arithmeticas. Hac de re agit regula aurea proposita capite octauo huius opusculi; & etiam caput nonum ac septimum nostrę Logisticæ. Prętérea, tam Arithmeticæ vulgaris, quam Logisticæ practicæ præscripta fere omnia, quæ non pertinent ad tria capita hic prius enumerata.

REFLEXIO II.

Vsitatum est apud Arithmeticos, considerare numeros actiuos, & passiuos; item numeros, tum formaliter, tum materialiter sumptos. Logistica nostra, à vulgari Arithmetica, differt tantum quo ad numeros compendiatè scriptos, atque formaliter sumptos.

PRæter indiuidua nihil indicant numeri, quodque vnum, vel plura indiuidua indicat, numerus dicitur: in diuersis circumstantijs diuersimode intelligitur numerus; subinde enim intelligitur in sensu actiuo, vt significet illud quod indicat, siue repræsentat indiuidua; atque à nobis dicitur numerus actiuus, vel simpliciter numerus appellatur: etenim de actiuis numeris sermo est: quando oppositum non dicitur: vel per circumstantias non sufficienter insinuatur. Subinde numerus intelligitur in sensu passiuo, vt significet ipsa indiuidua indicata à numero actiuo: atque à nobis dicitur numerus passiuus. Prætera numerus aliquando intelligitur in sensu formali, ita vt significet numerum consideratum, vt talis numerus est, tum quo ad vnitates per quas indicat indiuidua, tum quo ad indi-

uidua quæ indicat: atque à nobis dicitur numerus formaliter ſumptus. Aliquando numerus intelligitur in ſenſu materiali, vt ſignificet numerum in quantum plura, vel pauciora indiuidua indicat: atque à nobis dicitur numerus materialiter ſumptus. Vt conſtet in ſingulis expoſitis ſenſibus adhiberi, atque intelligi numeros: non tantum in noſtra Logiſtica, ſed etiam in familiari ſermone, atque adeo apud eos, qui non vtuntur niſi vulgari Arithmetica: ſatis erit afferre paucas loquutiones familiariter vſitatas; ex quibus ſufficienter appareant ſenſus à nobis enumerati. Primo ſuppoſito quod duo homines, inſtituendo, Exempli gratia regulam auream, ſinguli inueniant numerum indicantem decem aureos: rectè dicitur, ſingulos per regulam auream inueniſſe numerum decem aureorum; & ex ipſa loquutione ſatis patet, quod ſermo ſit de numeris quos actiuos appellauimus. Secundo, ſi dicatur, quod duo homines pro mercede acceperint eumdem aureorum numerum, vel decem aureorum numerum: ex ipſa loquutione ſatis patet quod ſermo ſit de numeris quos paſſiuos diximus. Tertio, conſiderentur ſequentes numeri; primus ſit, quatuor ternarij hominum: ſecundus ſit, tres quaternarij hominum; tertius ſit vigintiquatuor ſecundæ: quartus ſit, triginta ſex tertiæ: quintus ſit, duodecim homines, ſextus ſit, duodecim equi. De iſtis numeris, etiam apud eos qui tradunt vulgarem Arithmeticam, verificatur: quod omnes inter ſe ſpecie differant: ac præterea quod omnes inter ſe æquales ſint. Quando de prædictis ſex numeris aſſeritur, quod omnes inter ſe ſpecie differant, agitur de numeris formaliter ſumptis; etenim primus, ſecundus, & quintus: inter ſe non differunt, niſi quo ad vnitates per quas indicant duodecim hominum indiuidua; præterea, quintus, & ſextus numerus, inter ſe non differunt, niſi quo ad ipſa indiuidua, quæ indicant: ergo quando ſex iſti numeri dicuntur omnes inter ſe ſpecie differre; conſiderantur tum quo ad vnitates per quas indicant, tum etiam quo ad indiuidua, quæ indicant: atque adeo conſiderantur numeri formaliter ſumpti. Quarto, quando prædicti ſex numeri dicuntur omnes inter ſe æquales eſſe, agitur de numeris materialiter ſumptis; etenim æquales dicuntur in quantum ſinguli indicant æquè multa, ſiue duodecim indiuidua; cui æqualitati non aduerſatur; quod duodecim indiuidua indicata à primo numero, ſint homines; quodque duodecim indiuidua indicata à tertio numero, ſint vnitates ſimplices; item duodecim indiuidua indicata à ſexto numero ſint equi. Eidem æqualitati non aduerſatur, quod in quinque primis numeris, per diuerſas vnitates indicentur duodecim indiuidua; ex quibus patet, æqualitatem tan-

tum

tum affirmari de iſtis numeris, conſideratis in quantum æque multa indiuidua indicant: hoc eſt de numeris materialiter ſumptis.

Hæc ſufficere arbitror, vt conſtet, non tantum in noſtra Logiſtica, ſed etiam apud eos, qui vulgari Arithmetica vtuntur, in diuerſis circumſtantijs, diuerſo ſenſu intelligi numeros: eoſque aliquando intelligi in ſenſu actiuo, aliquando in ſenſu paſſiuo, aliquando in ſenſu formali, aliquando in ſenſu materiali; ac præterea conſtat, quid ſint numeri actiui, vel paſſiui, vel formaliter, aut materialiter ſumpti: neque hic videntur plura addenda circa primam partem propoſitæ reflexionis, in qua aſſeritur etiam in Vulgari Arithmetica conſiderari numeros, formaliter, atque materialiter ſumptos; etenim manifeſtum eſt vulgaris Arithmeticæ terminos non excedere duas aſſertiones paulò ante propoſitas, in quarum vna aſſeritur ſex numeros ibidem propoſitos ſpecie inter ſe differre, in altera verò aſſeritur eoſdem iſtos ſex numeros inter ſe æquales eſſe: ſed etiam in priori aſſertione agitur de numeris formaliter ſumptis, in poſteriori verò agitur de numeris materialiter ſumptis, vt conſtat ex ijs quæ paulò ante notauimus: ergo in vulgari Arithmetica ſubinde agitur de numeris formaliter ſumptis, ſubinde verò agitur de numeris materialiter ſumptis: atque adeo in vulgari Arithmetica conſiderantur numeri tum formaliter, tum etiam materialiter ſumpti.

Vt conſtet altera pars propoſitæ reflexionis. primo oſtendendum eſt, vulgarem Arithmeticam, atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre, quo ad numeros paſſiuos, hoc eſt, nulla inueniri indiuidua per Logiſticos numeros indicabilia, quæ indicari non poſſint per numeros vulgares: pro quo in memoriam reuocandum eſt, quod de ſimplici vulgari vnitate diximus: eam ſcilicet ex ſe indifferentem eſſe, ad ſignificandum quodcũque indiuiduum; neque excogitari, aut fingi poſſe vllum indiuiduum, quod ex vi alicuius hypotheſis, indicari non poſſit, à ſimplici, atque vulgari vnitate: quoniam igitur indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis, ſunt indiuidua: & quælibet indiuidua indicari poſſint à ſimplicibus, atque vulgaribus vnitatibus: patet non inueniri vlla indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis, quæ à vulgaribus atque ſimplicibus vnitatibus indicabilia non ſint: ergo indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis non differunt ab indiuiduis indicabilibus à numeris vulgaribus; quandoquidem igitur numeri Logiſtici paſſiui, atque poſſibiles, non ſint aliud, quam indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis: & numeri vulgares paſſiui poſſibiles non ſint aliud, quam indiuidua indicabilia à numeris vulgaribus: patet etiàm numeros Logiſticos paſ-

 ſiuos

ſiuos atque poſſibiles, non eſſe diuerſos, à numeris vulgaribus paſſiuis atque poſſibilibus: & conſequenter vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre quo ad numeros paſſiuos.

Vulgarem Arithmeticam, atque Logiſticam noſtram, inter ſe non differre, quo ad numeros materialiter ſumptos: etiam ſatis manifeſtum eſt, ex ijs quæ diximus de numeris materialiter ſumptis; etenim inter numeros materialiter ſumptos, alia differentia non inuenitur, quam quod vnus, altero plura, vel pauciora indiuidua indicet: iam verò ſatis patet quod nullus numerus Logiſticus, tam multa, vel tam pauca indiuidua indicet, vt æque multa, aut pauca indiuidua indicari non poſſint à numero vulgari: igitur Arithmetica vulgaris, atque Logiſtica noſtra inter ſe non differunt, quo ad numeros materialiter ſumptos.

Reliquum eſt vt oſtendam, vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram, inter ſe differre, quo ad numeros formaliter ſumptos; pro quo duplex caſus diſtinguendus eſt: primus caſus ſit, quando ſermo eſt de numeris longiori ſcriptione propoſitis: ſecundus caſus ſit, quando ſermo eſt de numeris repræſentatis compendiatis illis ſcriptionibus, quæ in vulgari Arithmetica, vel in noſtra Logiſtica aſſumuntur, atque adhibentur pro inſtituendis operationibus. Placet prius conſiderare ſecundum caſum, ac deinde tranſire ad primum. Pro ſecundo caſu aduertendum eſt in vulgari Arithmetica deeſſe ſcriptiones compendiatas quibus inter ſe diſtinguantur vnitates poſitiuæ, & negatiuæ: item ſcriptiones compendiatas quibus repræſententur vnitates denominatæ aut radicales: igitur Logiſtica noſtra, poteſt compendiata ſcriptione repræſentare aliquas vnitates formaliter ſumptas, quas compendiata ſcriptione repræſentare non poteſt vulgaris Arithmetica: ergo numeri logiſtici compendiata ſcriptione repræſentati, poſſunt indicare indiuidua, per aliquas vnitates formaliter ſumptas, per quas compendiata ſcriptione indiuidua repræſentare non poteſt vulgaris Arithmetica; ergo compendiata ſcriptione repræſentati numeri vulgares, non conueniunt cum numeris Logiſticis, quo ad vnitates formaliter ſumptas per quas indiuidua repræſentare poſſunt; ſed numeri qui non conueniunt quo ad vnitates formaliter ſumptas, per quas repræſentant indiuidua, ſunt numeri formaliter ſumpti qui inter ſe non conueniunt: ergo inter ſe non conueniunt numeri vulgares, & Logiſtici, formaliter ſumpti, atque compendiata ſcriptione repræſentati: atque adeo vulgaris Arithmetica cum Logiſtica noſtra non cõuenit quo ad numeros formaliter ſumptos.

tos, & compendiata ſcriptione repræſentatos. Notandum hic eſt, quod tota differentia propter quam non conueniunt iſti numeri, præcisè, & adæquatè dependeat, atque inferatur, ex diuerſis vnitatibus, non tantum formaliter ſumptis, vel tantum compendiatè ſcriptis, ſed ex diuerſis vnitatibus, & formaliter ſumptis, & etiam compendiatè ſcriptis: atque hoc vnico ex capite habetur omnis diuerſitas quæ inuenitur inter vulgaris Arithmeticæ, & Logiſticę noſtræ numeros: quod melius conſtabit ex conſideratione primi caſus paulò antè propoſiti, ſiue conſiderando numeros vulgares, atque Logiſticos productiori ſcriptione repræſentatos, independenter à compendiata ſcriptione. Hoc caſu vulgaris Arithmeticæ, & Logiſticæ noſtræ numeri formaliter ſumpti, conueniunt inter ſe: & verum eſt vulgarem Arithmeticam, & Logiſticam noſtram non differre inter ſe quo ad numeros formaliter ſumptos, ſed non repræſentatos compendiata ſcriptione: etenim omnis differentia quæ inuenitur inter numeros formaliter ſumptos: vel habetur ex diuerſitate indiuiduorum quæ à numeris indicantur, vel ex diuerſitate vnitatum per quas indiuidua indicantur, quando tam indiuidua indicata, quã vnitates indicantes conſiderantur in ſenſu formali, ſiue vt talia indiuidua, aut tales vnitates ſunt: quare, ſi non dentur vlla indiuidua formaliter ſumpta, neque vllæ vnitates formaliter ſumptæ, quæ independenter à compendiata ſcriptione exprimi poſſint à Logiſtica & tamen exprimi non poſſint à vulgari Arithmetica: manifeſtum eſt vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre, quo ad numeros formaliter ſumptos, independenter à compendiata ſcriptione; iam vero non dari indiuidua formaliter ſumpta, quæ independenter à compendiata ſcriptione indicabilia ſint à logiſtica, & tamen à vulgari Arithmetica indicari non poſſint: ſatis manifeſtum eſt, quandoquidem paulò ante oſtenſum ſit, vulgaris Arithmeticæ, atque Logiſticæ noſtræ numeros paſſiuos, inter ſe non differre: numeri enim paſſiui, nihil aliud ſunt quam ipſa indiuidua à numeris indicata: hinc indiuidua à numeris vulgaribus atque Logiſticis indicata, atque formaliter ſumpta, inter ſe differrent, etiam inter vulgaris Arithmeticæ & Logiſticæ noſtræ numeros paſſiuos, inueniretur differentia. Deinde, non dari vnitates formaliter ſumptas, quæ independenter à compendiata ſcriptione indicabiles ſint à Logiſtica, & tamen indicari non poſſint à vulgari Arithmetica, patet ex eo, quod ad indiuidua indicanda nullæ aliæ vnitates à vulgaribus diuerſæ, aſſumantur in Logiſtica, quam vnitates denominatæ, radicales, & negatiuæ, quæ ſingulæ à nobis exponuntur vocibus vſitatis in vulgari Arithmetica, atque adeo inde-

independenter à compendiata scriptione, communes sunt, tam vulgari Arithmeticæ quam nostræ Logisticæ; quare independenter à compendiata scriptione, non inueniuntur vnitates exprimibiles à Logistica, quæ à vulgari Arithmetica exprimibiles non sint; præterea tam vulgari Arithmeticæ quam Logisticæ, commune est, expressas vnitates considerare, vt tales vnitates sunt: igitur independenter à compendiata scriptione, non dantur vnitates formaliter sumptæ exprimibiles à Logistica, quæ à vulgari Arithmetica exprimibiles non sint.

Ex iis quæ hic paulo fusius proposita sunt, constant singula quæ in reflexionis titulo notantur: atque adeo inter Logisticæ nostræ, & vulgaris Arithmeticæ numeros, differentiam non inueniri, quæ non dependeat à compendiata scriptione, quod notatu dignum existimaui, & fortassis melius intelligetur ex subsequenti reflexione in qua ostendimus, quomodo ex vulgaris Arithmeticæ compendiatis scriptionibus deriuentur illæ scriptiones compendiatæ, quibus in nostra Logistica exprimuntur numeri, denominati, radicales, & negatiui; etenim istos tantum numeros compendiatè repræsentatos addimus numeris, qui in vulgari Arithmetica repræsentantur compendiata scriptione: atque ex dicendis de deriuatione scriptionum quas adhibemus, pro compendiata repræsentatione numerorum denominatorum, radicalium, & negatiuorum; apparebit, non istos numeros, etiam formaliter sumptos, sed solas compendiatas scriptiones deesse in vulgari Arithmetica.

REFLEXIO III.

Ex vulgari Arithmetica practica deriuantur scriptiones compendiatæ, quibus in Logistica nostra repræsentantur numeri denominati, radicales, & negatiui.

PRæter vulgares numeros, in nostra Logistica considerantur, atque adhibentur, numeri denominati, radicales, & negatiui: his numeris non vtitur vulgaris Arithmetica: singuli tamen ex vulgari Arithmetica deriuantur: hoc est, praxes quibus in Logistica compendiatè exprimuntur, desumptæ sunt ex praxibus pro numerorum compendiata repræsentatione vsitatis, in practica atque vulgari Arithmetica. Deriuationem prædictorum numerorum nostræ Logisticæ paucis expono.

Pro deriuatione scriptionis compendiatæ, qua in nostra Logistica repræsentantur numeri qui denominati appellantur: posita sit

hypo-

hypothesis, quod vnitas simplex sit vnus homo, manente hac hypothesi, ad indicandos decem libros, non sufficit scribere 10: quandoquidem ex vi hypothesis, numerus 10 simpliciter positus, indicet decem homines: vt igitur hoc casu vulgaris Arithmetica, aliqua ex parte compendiata scriptione indicet decem libros, duplicem praxim habet; prima est, scribere, 10 libri. Secunda est, priori hypothesi alteram addere, in qua supponatur, per litteram A, intelligi debere librum; & facta hac hypothesi, scribere, decem A. Ex duabus compendiatis scriptionibus hic propositis, primam superius inuenies, vbi capite 2, vel 3 agimus de Additione, vel Subtractione numerorum diuersæ speciei: & non facile inuenies librum qui agat de vulgari practica Arithmetica, in quo passim non adhibeatur prima scriptio compendiata. Secunda scriptio compendiata adeo familiaris est, in tota, & qualibet parte Arithmeticæ, atque Geometriæ: vt vix vllam paginam inuenias: (Exempli Gratia in toto Euclide) in qua huiusmodi scriptio non adhibeatur: nihil enim familiarius, quam alphabeti litteras ita adhibere, vt breuiter in scriptione repræsentent, triangulum, circulum, lineam, numerum, aut quoduis aliud ens, quod ex vi hypothesis significant. Itaque in casu paulo ante proposito, in quo vnitas simplex hominem significat: in vulgari Arithmetica maximè vsitatæ inueniuntur duæ praxes, quibus aliqua ex parte cōpendiata scriptione repræsentari possint decem libri. Prima est, scribere 10 libri. Secunda est, facta hypothesi, quod A librum significet, scribere decem A. Ex his resultans tertia praxis, hæc est: supponendo quod A librum significet, scribere 10 A. Verum hæc tertia praxis vsitata sit in vulgari Arithmetica, non controuerto: eam ex duabus prioribus, atque maxime vsitatis praxibus immediate deriuari, manifestum est; hac tertia praxi compendiate scripti numeri, sunt illi, qui in nostra Logistica appellantur numeri denominati: patet igitur Logisticæ nostræ numeros denominatos, immediate deriuari ex praxibus maxime vsitatis in vulgari Arithmetica, saltem quo ad eam partem quæ constat ex numeratore & dignitate: quandoquidem per vocem dignitas, nihil aliud intelligamus, quam alphabeti litteram, vt paulo ante diximus, assumptam, ad significandum aliquid. De denominatore numerorum denominatorum paulo post recurret sermo.

Numeri vulgares fracti, significant productum ex diuisione: vt satis patet ex prima praxi diuisionis, proposita in quinto capite, atque ex ijs quæ dicta sunt de vulgaribus fractis numeris; quod adeo verum est, vt productum ex numero 2 diuiso per numerum 3,

nihil

nihil aliud sit, quam duæ tertiæ: & etiam duæ tertiæ nihil aliud sint, quam productum ex numero 2 diuiso per numerum 3. Quoniam igitur vulgaris Arithmetica specialem atque compendiatam scriptionem assumit, vt repræsentet vulgares fractos numeros: manifestum est vulgarem Arithmeticam assumere specialem atque compendiatam scriptionem, qua repræsentet producta diuisionis. Deinde, quia in hac compendiata scriptione adhibet ipsos diuisionis genitores, vt satis constat ex dictis cap. 6. etiam patet, vulgarem Arithmeticam assumere specialem, atque compendiatam scriptionem, in qua per genitores repræsentat productum diuisionis. Maxime vtilem hanc praxim ampliando, atque imitando: docemus duo diuersa: quorum primum est, compendiata scriptione exhibere productum illius diuisionis, quæ radicis extractio dicitur: hoc est scribere numeros radicales: & similiter compendiata scriptione exhibere productum illius multiplicationis, in qua numerus aliquis in seipsum semel aut sæpius ducitur. Alterum est, compendiata scriptione exhibere productum cuiuslibet operationis diuersæ à duabus hic enumeratis: de hac secunda scriptione agitur in reflexione 4. Ad primam scriptionem pertinent tum numeri radicales, tum etiam numeri denominati in quantum constant ex numeratore, dignitate, & denominatore. Paulo ante ostendimus quomodo ex compendiata scriptione maxime vsitata in vulgari Arithmetica, deriuetur ea pars numeri denominati, quæ numeratorem atque dignitatem repræsentat; huiusmodi numeri denominati, præter numeratorem atque dignitatem, etiam inuoluunt denominatorem; quod nouum non est, immo adeo vsitatum in vulgari Arithmetica, vt nulli vulgares numeri inueniantur, qui non constent ex numeratore & denominatore: vt dictum est capite 6. vbi etiam notauimus, in scribendis numeris vulgaribus, liberum esse, vel denominatorem expresse ponere, vel denominatorem subaudire, quoties denominator est vnitas simplex: eumdem verò denominatorem expressè ponendum esse, quoties diuersus est à simplici vnitate; hanc legem in vulgari Arithmetica vsitatam pro denominatoribus vulgarium numerorum, imitamur, vel vt verius dicam retinemus: tum pro denominatoribus numerorum denominatorum, tum etiam pro denominatoribus radicalium numerorum. Deinde sicut in vulgaris Arithmeticæ scriptione, interposita lineola, numeratori deorsum succedit denominator: sic in numeris denominatis interposita dignitate, numeratori dextrorsum succedit denominator. Denique quemadmodum in vulgaribus numeris denominator, indicat, per quid simplex vnitas diuidi debeat, vt habeatur vna ex vnitatibus

indi-

indicatis à numeratore: ita denominator numeri denominati, indicat, quot vnitates indicatæ à dignitate succeſſiue multiplicari debeant, vt habeatur vna ex vnitatibus indicatis à numeratore. Ex his patet nihil inueniri in Logiſticæ noſtræ numeris denominatis, quod diriuatum non ſit ex vulgari Arithmetica.

Pro deriuatione numerorum radicalium, aduertendum eſt, quod pro illa diuiſione quæ radicis extractio dicitur, non detur niſi vnus ex genitoribus diuiſionis: pro reliquis diuiſionibus, datur vterque genitor diuiſionis: de quo plura videri poſſunt cap. 8. partis 2. Ideæ Logiſticæ. Iam verò, pro ſcriptione, qua vulgaris Arithmetica compendiate exprimit diuiſionis productum, requiritur vterque genitor diuiſionis: atque adeo hæc ſcriptio inutilis eſt, vt per datum radicis genitorem exprimatur radix; neque inuenio ſcriptionem aliquam compendiatam, atque communi vſu receptam ab expoſitionibus vulgaris Arithmeticæ: per quam propoſiti vulgaris numeri, quælibet radix, commode exprimatur per datum genitorem: itaque prius conſiderando productiorem ſcriptionem, qua propoſiti numeri quælibet radix poſſit exprimi, atque hanc ſcriptionem contrahendo, efformo eam ſcriptionem compendiatam, qua vtor in Logiſtica; in quem finem notandum eſt, quod propoſiti numeri A radix, dicatur, ille numerus, qui per vnam aut plures diuiſiones producitur ex numero A, ſuppoſito ſemper diuiſore eodem, atque æquali ipſi radici. Exem. Gra. numeri 16 radix prima eſt numerus 4: quia 16 ſemel diuiſum per 4 producit 4. Rurſus numeri 16 radix tertia eſt numerus 2: quia 16 tertio diuiſum per 2, producit 2, cum enim 16 diuiſum per 2 producat 8, & rurſus 8 diuiſum per 2 producat 4, ac denique 4 diuiſum per 2 producat 2: patet 16 tertio diuiſum per 2 producere 2. Ex hoc exemplo etiam patet, eiuſdem numeri diuerſas radices dari: atque hanc diuerſitatem dependere ex eo, quod numerus qui radix dicitur, ex numero cuius radix dicitur, producatur per plures aut pauciores diuiſiones; vt igitur longiori ſcriptione, per ipſum numerum 16 exprimantur, atque inter ſe diſtinguantur, diuerſæ atque paulo ante propoſitæ eius radices: ad exprimendum numerum 4, ſcribi poſſet, radix, vnica diuiſione producta ex numero 16. Item ad exprimendum numerum 2, ſcribi poſſet, radix tribus diuiſionibus producta ex numero 16. Ex his ſatis manifeſtum eſt, quomodo longiori ſcriptione (maxime intelligibili apud eos, qui vulgarem Arithmeticam prorſus non ignorant) per numerum exprimi poſſit quælibet eius radix, ſiue illa producatur per vnam, ſiue per plures, & quotlibet diuiſiones; iam verò longiores illas ſcriptiones contrahendo, inuenio eam ſcriptio-

nem, quam adhibeo pro numeris radicalibus, siue, vt per propositum quemuis numerum, indicem quamlibet eius radicem; & primo quidem, pro integra voce radix assumo litteram R, quæ compendiosè repræsentat vocem radix: huic successiue adscribendo denominatorem, nota Arithmetica expressum, compendiose indico, per quot diuisiones producatur radix, præterea interposito asterismo ipsi denominatori successiue adscribo numerum cuius radix significatur. Denique ante litteram R, quæ repræsentat vocem radix, scribo numeratorem, siue numerum vulgarem indicantem quot radices significentur à scriptione. Sic Exempli Gratia scriptio, 1 R 1 * 16, legitur, vna radix prima numeri sexdecim: vel vna radix prima sexdecim: sed sensus idem est, ac si diceretur, vna radix, vnica diuisione producta ex numero sexdecim. Similiter scriptio 1 R 3 * 16, legitur, vna radix tertia sexdecim: sensus tamen idem est ac si diceretur, vna radix triplici diuisione producta ex numero sexdecim. Pari modo scriptio 4 R 1 * 16, legitur, quatuor radices primæ numeri sexdecim: & sensus idem est, ac si diceretur, quator radices quæ singulæ vnica diuisione producuntur ex numero sexdecim. Item scriptio 4 R 3 * 16, legitur, quatuor radices tertiæ numeri sexdecim: sensus idem est, ac si diceretur, quatuor radices quæ singulæ triplici diuisione producuntur ex numero sexdecim. Ex his satis apparet, vnde deriuata sit illa scriptio Logistica, qua repræsentamus numeros radicales. Apud vulgaris Arithmeticæ Scriptores satis familiare est, radicem quadratam appellare, quam nos primam radicem dicimus; & radicem cubicam nominare, quam nos vocamus radicem secundam; quem vsum, non solum non retinemus: sed planè reijcimus, vt noxium pro nostra Logistica: à qua pro viribus putauimus remouendas loquutiones improprias, analogicas, & æquiuocationibus, atque erroribus obnoxias: tales reputamus paulo ante enumeratas, quas non admittimus. Reliquas verò quibus ab Algebræ Scriptoribus exprimuntur radices tertiæ, quartæ, quintæ, &c. non tantum reijcimus, sed detestamur, non minus quam reliquam ipsorum suppellectilem chimæricam.

Vt numeros positiuos & negatiuos compendiata scriptione distingueremus inter se: hæc lex assumpta est in nostra Logistica: nimirum, vt omnes numeri censeantur negatiui, qui expresè afficiuntur signo negatiuo, hoc est signo —; reliqui verò numeri habeantur positiui. Similis lex passim vsitata inuenitur; considera si placet duas scriptiones non compendiatas, prima sit homo; secunda sit negatio hominis; secunda scriptio significat negationem eius quod à prima indicatur: atque duæ istæ scriptiones inter se tantum

diffe-

differunt penes particulam negatiuam, quæ inuenitur in secunda scriptione, sed non inuenitur in prima scriptione. Similiter posito quod prima scriptio sit non homo; secunda sit negatio non hominis; rursus secunda scriptio significat negationem eius, quod per primam scriptionem indicatur: atque duæ istæ scriptiones inter se non differunt, quam penes particulam negatiuam, quæ in secunda inuenitur, sed deest in prima scriptione. Simili planè modo maxime familiari vsu receptum est, inter se per solam particulam negatiuam distinguere quaslibet duas scriptiones, quarum vna significat negationem eius, quod significatur per alteram. Iam verò ab hoc communi vsu non aliter recedimus quam compendiata scriptione repræsentando particulam negatiuam: atque statuendo, vt signum —, compendiate indicans particulam negatiuam, efficiat, vt scriptio affecta hoc signo, significet negationem eius, quod significaret tali signo destituta: hoc enim est quod præscribitur in lege paulo ante insinuata, atque assumpta in nostra Logistica, pro distinctione numerorum, qui à nobis dicuntur positiui, aut negatiui: de quibus consuli potest secũda pars appendicis libri secundi nostrę Logisticæ.

Exposita deriuatione scriptionum, quibus in Logistica compendiate indicamus numeros denominatos, radicales, & negatiuos: non erit inutile, ex singulis istis compendiatis scriptionibus, aliquam pro exemplo proponere, atque eius significationem exponere, vocibus pro vulgari Aritmetica vsitatis: vt sic melius appareat, vulgarem Arithmeticam non carere aut istis numeris, aut modo eos exprimendi, (tametsi de numeris formaliter sumptis agatur) sed tantum carere illa compendiata scriptione, qua in Logistica à nobis exprimuntur.

Numerus denominatus 4 a 3, formaliter sumptus, nihil est aliud, quam numerus A bis in se, ac deinde ductus in quatuor, sumptus formaliter: vel formaliter sumpti quatuor numeri, qui singuli producuntur ex numero A bis ducto in se.

Numerus radicalis 3 R 1 * 16, formaliter sumptus, nihil est aliud, quam formaliter sumptum productum ex vna diuisione numeri sexdecim, in qua diuisor æquatur producto diuisionis, multiplicatum per tria; vel formaliter sumpti tres numeri, qui singuli producuntur vnica diuisione numeri sexdecim, in qua productum diuisionis diuisori æquatur,

Numerus negatiuus — 4, formaliter sumptus, nihil est aliud, quam numerus quatuor negationum, siue priuationum, vnitatis simplicis, formaliter sumptus.

Planè rudis esset etiam in Arithmetica vulgari, qui non percipe-

ret quid significent numeri hic expressi productiori scriptione: neque negari potest istos numeros pertinere ad vulgarem Arithmeticam: vel vt verius dicam, prædictos numeros præcognitos supponi, apud expositores vulgaris practicæ Arithmeticæ; ex multis quæ hoc mihi persuadent duo hic subijcio. Primum est, quod à compendiatis numerorum scriptionibus sumant exordium. Secundum est, quod non inueniam vbi longioribus scriptionibus expressos numeros exponant. Practicæ Arithmeticæ expositoribus ignoscendum est, si solam praxim doceant, atque ex speculatiua Arithmetica supponant notitiam numerorum, quorum practicum vsum exponunt; immo oppositum facere nihil aliud esset, quam cum speculatiua Arithmetica practicam confundere, atque permiscere. Vt tamen verum fatear prorsus non percipio, vnde prædictos numeros cognitos supponant, vel quare illos non definiant atque exponant, qui docent speculatiuam Arithmeticam, ex qua deriuatur Arithmetica, vulgaris practica. Vel si forte alicui videatur ab ipsis sufficienter declaratos numeros, quando statuunt; primo, vnitatem esse secundum quam vnumquodque eorum quæ sunt vnum dicitur; secundo, numerum esse compositam ex vnitatibus mulitudinem; denique præter duas istas definitiones propemodum nihil vlterius afferant, conducens ad numerorum intelligentiam: si inquam alicui videatur, has duas definitiones sufficienter declarare, quid per vnitatem, aut numerum intelligendum sit: ingenij acumen, atque perspicacitatem laudo, atque suspicio. Quam parum definitiones istæ prosint tenuitati meæ, colliges ex subsequentibus paucis dubijs; etenim ex multis pauca tantum afferre volui, quandoquidem pauca sufficiant, vt appareat, quam obscura mihi sint, quæ ab aliquibus, vel habeantur, vel saltem asseruntur clarissima.

Primo, quemadmodum aliud est abstracta albedo, à qua subiectum album dicitur; aliud verò subiectum habens abstractam albedinem, quodque ab abstracta albedine quam habet, album dicitur: ita etiam aliud est, abstracta vnitas, à qua subiectum vnum dicitur: aliud vero subiectum habens abstractam vnitatem, quodque ab abstracta vnitate quam habet vnum dicitur, iam verò, nisi fallor, vox vnitas intelligi potest in duplici diuerso sensu: nimirùm in sensu abstracto, vt significet abstractam vnitatem, à qua subiectum habens illam abstractam vnitatem, vnum dicitur: deinde in sensu concreto, vt significet subiectum habens abstractam vnitatem, atque idem quod significat vox vnum. Quæro igitur an vnitas paulo ante definita sit vnitas intellecta in sensu abstracto, vel certe sit vnitas intellecta in sensu concreto? Si secundum dicendum sit, ego certe non vi-

deo,

deo, quomodo hoc intelligi possit ex definitione proposita, in qua nihil inuenio priorem sensum excludens, atque legentem determinans ad secundum sensum. Si dicendum sit prædictam definitionem indifferentem esse ad vtrumque sensum, vel quod in primo sensu intelligenda sit: ex nostra Logistica, atque eius Idea intelligere poteris, quod licet in hoc Romano Collegio per quindecim integros annos Mathesim publice docuerim: tamen hactenus assequutus non fuerim, quid per vnitatem intelligendum sit apud Arithmeticos: quippe vbique conatus sum inculcare, quod vnitas in sensu concreto intellecta, sit illa, de qua agunt Arithmetici.

Secundo, si numerus est vnitatum aggregatum, quandoquidem aliud sit vnitas, aliud vero sit vnitatum aggregatum: quæro an vnitas numerus sit? si dici debeat vnitatem non esse numerum, non percipio quomodo numero 6 addendo vnitatem, habeatur numerus maior numero 6; etenim posito quod vnitas numerus non sit, quando numerus 6 additur vnitas, tunc numero 6 nullus numerus additur: sed, saltem à me, intelligi non potest quomodo numerus sex fiat maior, quando illí nullus numerus additur: adeoque à me intelligi non potest, quomodo numerus sex fiat maior numerus quando illi vnitas additur, supposito quod vnitas non sit numerus. Rursus supposito quod vnitas numerus non sit, non percipio quomodo Arithmetici numerorum operationibus annumerent additionem, in qua vnitas vnitati additur: vel vnitas ex vnitate subtrahitur; denique his alijsque similibus dubijs turbatus, vbique in logistica doceo vnitatem numerum esse; & prima Arithmeticæ fundamenta non percepi, si iuxta illa dicendum sit, vnitatem numerum non esse.

Tertio in diuersis circumstantijs diuersa intelligi per numerum Arithmeticum, nisi ego aberro, manifestum est ex dictis in præcedenti reflexione: idque verum esse ostendimus, etiam sistendo intra terminos vulgaris Arithmeticæ, quæ ab inuicem distinguit numeros diuersæ speciei: hoc est eos qui simul addi possunt, atque in vnam summam colligi: ab illis, qui simul addi, siue in vnam summam colligi non possunt; ac præterea non confundit numeros inter se æquales, cum illis qui inter se sunt inæquales. Quæro igitur in quo loco expositi inueniantur sensus illi diuersi, quos admittit vox numerus, in diuersis circumstantijs adhibita? Ego certè, etiam apud eos qui ad Euclideam doctrinam scriptis annotationibus, vasta volumina impleuerunt: vix vllum verbum additum inuenio paulo ante hic ex Euclide propositę numeri definitioni; adeò alijs clara est illa definitio in qua præter tenebras nihil video.

RE-

REFLEXIO IV.

Proponuntur aliqua in quibus inter se conueniunt, vel ab inuicem differunt, operationes vulgaris Arithmeticæ & Logisticæ nostræ. Deinde exponitur quomodo posteriores operationes, ex anterioribus deriuentur. Denique obiter notatur aliqua differentia inter nostram Logisticam, & Algebram.

PRimo. Operationes vulgaris Arithmeticæ, subinde quidem per genitores exhibent productum operationis: sed tamen plerumque aliter quam per genitores exhibent operationis productum. Logisticæ nostræ operationes plerumque per genitores exhibent productum operationis: subinde tamen aliter quam per genitores exhibent operationis productum. Hæc assertio quatuor partes habet: circa singulas breuiter noto, vnde constet verum esse quod asseritur. Operationes vulgaris Arithmeticæ subinde per genitores exhibere productum operationis: manifestum est ex prima praxi diuisionis proposita capite 5. vt pluribus ostensum est circa initium præcedentis reflexionis. Operationes vulgaris Arithmeticæ, plerumque aliter quam per genitores exhibere productum operationis: constat ex superiorum capitum praxibus; etenim si excipiatur prima praxis diuisionis, reliquæ omnes, aliter quam per genitores exhibent productum operationis. Operationes nostræ Logisticæ plerumque per genitores exhibere productum operationis: immediatè patet ex praxibus quas libro primo capite secundo nostræ Logisticæ afferimus, pro additione, multiplicatione, atque diuisione; etenim in singulis illis praxibus nihil aliud docetur, quam operationis genitores, certo modo, atque ordine scribendo, per ipsos exhibere productum operationis. Operationes nostræ Logisticæ aliquando aliter quam per genitores exhibere productum operationis: constat ex praxi quam capite secundo libri primi Logisticæ tradimus, pro subtractione: iuxta quam praxim exhibitum subtractionis productum, continet quidem datum superiorem genitorem: sed non continet datum inferiorem genitorem; hic mutato prius signo scribitur in producto: adeoque in producto Logisticæ subtractionis non exhibetur inferior genitor, sed numerus, qui ab inferiori dato genitore tantum differt, quantum vnitates positiuæ, & negatiuæ, diffe-

differunt inter se; quare prædicta Logisticæ nostræ praxis, aliter quam per genitores exhibet productũ subtractionis; qua de re paulo post recurret sermo: & plura inuenies capite 9 partis secundæ ideæ Logisticæ. Præterea licet capite secundo libri primi Logisticæ, non aliter quam per genitores doceamus exhibere productum multiplicationis: tamen subinde etiam aliter quam per genitores exhibemus aliqua multiplicationis producta. Exempli gratia, supposito quod genitores dati pro multiplicatione, inter se non differant, atque numerus denominatus 1 a 1 duci debeat in seipsum: iuxta praxim prædicti secundi capitis Logisticæ, scripto 1 a 1 *in* 1 a 1, per genitores exhibebit productum propositæ multiplicationis: quod idem productum, sed non per genitores exhibebit scriptio 1 a 2: etenim iuxta dicta in capite primo libri primi Logisticæ prædictæ duæ scriptiones inter se æquiualent; atque vtraque exhibet productum ex numero denominato 1 a 1 ducto in se: sed tamen in secunda scriptione, non repræsentantur genitores propositæ multiplicationis: atque adeo hæc secunda scriptio aliter quam per genitores exhibet productum multiplicationis. Similiter scriptio Logistica, qua repræsentamus productum ex illa diuisione, quam radicis extractionem appellamus, aliter quam per genitores repræsentat diuisionis productum.

Secundo. Numeri producti ex operationibus vulgaris Arithmeticæ plerumque sunt numeri simplices, subinde tamen sunt numeri compositi. Numeri producti ex operationibus Logisticis, subinde quidem simplices sunt, plerumque tamen sunt numeri compositi. Rursus proposita assertio, quatuor partes habet, atque circa singulas breuiter noto, quæ sufficiunt vt intelligatur verum esse quod asseritur; suppono tamen simplicis, atque compositi numeri definitiones à me propositas capite 8. libri 1. Logisticæ: neque controuerto, an illæ definitiones legitimæ, vel illegitimæ haberi debeant. Ex operationibus vulgaris Arithmeticæ productos numeros plerumque simplices esse: satis constat ex superioribus capitibus, in quibus egimus de vulgaris Arithmeticæ operationibus: etenim si diuisionem excipias, non inuenies operationem, per quam ex duobus datis numeris simplicibus, producatur alius quam simplex numerus. Ex operationibus vulgaris Arithmeticæ productos numeros aliquando compositos esse; satis patet ex dictis de vulgari diuisione, ex qua non infrequenter producitur numerus compositus ex integro, & fracto vulgari numero. Ex operationibus Logisticis productos numeros plerumque compositos esse, constat ex praxibus additionis, subtractionis, & multiplicationis, traditis capite secundo li-

do libri primi Logisticę: etenim iuxta dictas praxes producti numeri omnes compositi sunt. Ex operationibus Logisticis productos numeros subinde simplices esse; constat ex ea diuisione quæ appellatur radicis extractio, etenim scriptio Logistica, simplicis numeri radicem exhibens repræsentat numerum simplicem.

Tertio. Vt vulgaris additio instituatur, dati numeri debent esse vulgares, atque eiusdem speciei: vt vulgaris subtractio instituatur, dati duo numeri debent esse vulgares atque eiusdem speciei, & insuper datus numerus superior non potest esse minor dato inferiori numero. Vt instituatur vulgaris multiplicatio, aut diuisio, dati numeri debent esse vulgares. Pro quauis logistica operatione, sufficit vt dati numeri sint Logistici. Singulæ partes huius assertionis satis manifestæ sunt, ex dictis circa singulas operationes, de quibus agitur in assertione. Quoniam verò nulli numeri possibiles sunt, qui exprimi non possint per numeros Logisticos, & quælibet Logisticæ operationes institui possint circa quoslibet datos numeros Logisticos: patet operationes Logisticas tales esse, vt institui possint circa datos quoscunque numeros possibiles: etiam per datos numeros intelligendo numeros planè incognitos. Ab hac Logisticarum operationum amplitudine dicuntur operationes vniuersales: atque hæc ipsa amplitudo, vnica, vel certè planè præcipua causa est, quare assumantur in nostra Logistica.

Quarto. Operationes vulgaris Arithmeticæ non compendiatæ, satis immediatè patent ex ipsis operationum definitionibus. Idem verum est de singulis operationibus Logisticis quæ proponuntur capite secundo libri primi Logisticæ: supposita tamen intelligētia significationis quam apud nos habent signa † & —; quorum signorum significatio satis fusè declaratur in secunda parte appendicis libri secundi Logisticæ. Non omnes quidem, sed aliquæ vulgaris Arithmeticæ compendiatæ operationes, indigent demonstratione: immo meo iudicio inter vulgares Arithmeticæ operationes superius à nobis propositas, sola diuisio fractorum vulgarium numerorum indiget demonstratione quam inuenies cap. 7. pag. 57. Compendiatas operationes Logisticas nusquam proponimus: tradimus tamen varios modos vtiles vt longiores numeri Logistici contrahantur, atque reducantur ad alios magis compendiatos prioribus æquiualentes; atque inter praxes pro Logisticorum numerorum reductionibus à nobis allatas, nihil inuenio, quod videatur demonstratione indigere, præter illud, quod circa signa † & — præscribitur, quando duo numeri Logistici particula *in*, vel *per* connexi ad vnum numerū reducūtur. Hoc demōstratū inuenies in parte secūda ideæ Logisticę pag. 62.

Pro

Pro deriuatione Logisticarum operationum ex vulgari Arithmetica, considerandà est praxis prima diuisionis vulgaris proposita capite 5. in hac praxi vulgaris Arithmeticæ, exhibetur productum diuisionis per ipsos genitores, scriptos certo modo, siue ordine: etenim nihil aliud docet, quam numero diuidendo, interposita lineola subscribere diuisorem, atque hac scriptione exhibere productum diuisionis; hæc praxis non tantum vtilis est, quando diuisor est maior numero diuidendo: sed etiam in quouis alio casu: dummodo non curetur scriptio breuissima, atque clarissima: sed sufficiat scriptio compendiata, atque vsitata in vulgari Arithmetica. Hinc patet iuxta vulgaris Arithmeticæ præcepta passim vsitata, cuiuscunque vulgaris diuisionis productum legitime repræsentari posse, per datos duos diuisionis genitores. Ex hac praxi Arithmeticæ vulgaris deriuantur vniuersales Logisticæ nostræ operationes, capite secundo libri primi Logisticæ propositæ, pro additione, multiplicatione, atque illa diuisione, in qua datur vterque genitor diuisionis; etenim imitando illud quod in prædicta praxi docet vulgaris Arithmetica, docet nostra Logistica, per genitores certo modo scriptos exhibere productum additionis, multiplicationis, & diuisionis. Harum trium operationum insinuata deriuatio, talis videri poterat, quæ vlteriori declaratione non indigeret; placet tamen singulas seorsim proponere, incipiendo à diuisione, vt additioni immediate succedat subtractio, quæ per genitores non exhibet productum.

Pro logistica diuisione, in qua vterque genitor proponitur, atque repræsentatur logistica scriptione compendiata: retinemus eamdem illam praxim capite 5 propositam, quæque pro vulgarium numerorum diuisione vsitata est: atque docemus diuisionis productum exhibere per scriptionem, in qua numero diuidendo interposita lineola subscriptus sit diuisor; circa hanc praxim, vel potius praxeos vsum, inter Logisticam, & vulgarem Arithmeticam alia differentia non intercedit, quam quod vulgaris Atithmetica hac praxi non vtatur, nisi circa numeros vulgares compendiate scriptos. Logistica vtatur eadem praxi, circa quoslibet numeros logistica scriptione compendiatè repræsentatos. Prædictæ praxi logisticæ diuisionis: alteram addimus: in qua numero diuidendo successiuè adscribimus, diuisorem, interposita tamen particula *per*, quæ compendiate significat idem, ac si scriberetur, *diuisum per*.: Quam parum hæc secunda praxis à priori differat, nemo non videt. immo vtriusque praxis scriptiones plane idem significare, satis constat ex dictis capite 6. quandoquidem idem significent sequentes lo-

quotiones, nimirum, duæ tertiæ, & duo diuiſum per tria. Secundam diuiſionis Logiſticæ praxim, priori addimus, propter ſolam commoditatem: quæ præcipuus, vel fortè vnicus finis eſt, propter quem compendiatæ ſcriptiones aſſumuntur, aut à vulgari Arithmetica, aut à Logiſtica. Iam verò, ſubinde ſatis commodum non eſt, in eadem linea repræſentare vnum numerum alteri ſubſcriptum, interpoſita lineola: immo quia hoc modo commodè typis exhiberi non poterant fracti vulgares numeri, propemodum vbique omiſſa eſt lineola ſeparans fracti numeri numeratorem, à denominatore: vt monuimus pag. 28. Præterea, ſaltem magis moleſtum non eſt per particulam *per*, intelligere voces *diuiſum per*: quam eaſdem voces intelligere, per lineolam ſeparantem duos numeros, quorum vnus alteri ſubſcriptus ſit. Hæc ſufficiunt pro deriuatione Logiſticæ diuiſionis, in qua datur vterque genitor diuiſionis. Deriuatio illius diuiſionis, in qua non datur niſi numerus diuidendus, quæque radicis extractio dicitur: expoſitione non indiget; ſiquidem præter ſimplicem radicalium numerorum ſcriptionem nihil contineat: atque in tertia reflexione ſatis multa dicta ſint de origine ſcriptionis, qua in logiſtica noſtra repræſentantur numeri radicales.

Praxis pro logiſtica multiplicatione propoſita capite ſecundo libri primi logiſticæ: proximè ſimilis eſt praxi diuiſionis; etenim quemadmodum pro diuiſione aſſumitur particula *per*, quæ æquiualeat vocibus *diuiſum per*: ſic pro multiplicatione aſſumitur particula *in*, quæ æquiualet vocibus *ductum in*. Præterea, quemadmodum particula *per*, interpoſita inter duos genitores, ſignificat genitorem qui particulam *per* præcedit, diuiſum per genitorem qui ſubſequitur: ita particula *in*, interpoſita inter duos genitores, ſignificat anteriorem genitorem ductum in poſteriorem; quare non minus manifeſtum eſt, quomodo vulgaris Arithmeticæ ſcriptiones, imitetur ea ſcriptio, qua multiplicationem logiſticam abſoluimus, quam altera qua abſoluimus Logiſticam diuiſionem, de qua paulò ante egimus.

Pro deriuatione illius ſcriptionis, qua abſoluimus Logiſticam additionem aduertendum apud eos qui vtuntur vulgari Arithmetica, familiariſſimum eſſe: Exempli gratia, lineola interpoſita ſucceſſiue ſcribere duos numeros vulgares, quorum prior ſcuta, alter iulios ſignificat: in quo caſu lineola ſeperans duos numeros, alioquin ſucceſſiuè ſcriptos, æquiualet his vocibus *& inſuper*, vel vocibus *ſimul cum*, aut aliis ſimilibus. Exempla huiuſmodi ſcriptionum, inuenies, in omnibus propemodum mercatorum libris, in quibus congeruntur notæ, acceptæ, aut datæ pecuniæ: vel etiam

mer-

mercium acceptarum aut venditarum : Similia exempla passim inuenies, apud eos, qui tradunt vulgarem practicam Arithmeticam vbi agunt de additione aut subtractione numerorum diuersæ speciei: atque adeo dici non debet nouum in vulgari Arithmetica, assumere lineolam connectentem duos numeros successiue scriptos, vt æquiualeat vocibus *simul cum*; hunc maxime communem vsum imitando, statuimus in nostra Logistica, vt signa † & — (quibuscunque tandem vocibus exprimantur) interposita inter duos numeros successiuè scriptos, æquiualeant his vocibus *simul cum*; atque adeo significent, numerum ante signum illud scriptum, sumptum simul cum numero scripto post signum. Iam vero in hac lege proposita in appendice lib. 2. Logisticæ, atque vt patet deriuata ex vsu in vulgari Arithmetica maximè familiari, consistit tota praxis additionis logisticæ: pro qua aliud non præscribitur, nisi vt numeri dati pro additione cum suis signis successiuè scribantur: etenim eo ipso quod successiuè cum suis signis scripti sint duo numeri, prior cum posteriore signo † vel — connectitur, & significatur prior simul cum posteriore. Quemadmodum verò prior diuisus per posteriorem significat productum diuisionis: & prior ductus in posteriorem significat productum multiplicationis; ita etiam prior simul cum posteriore significat productum additionis.

Pro deriuatione illius praxis, quã in Logistica tradimus pro subtractione: in memoriam reuocanda sunt, quæ in præcedenti reflexione diximus de numeris positiuis & negatiuis; nimirùm semper haberi æquales, vel eiusdem valoris numeros: siue numero A addatur positiuus numerus B; siue ex numero A, subtrahatur negatiuus numerus B; qualescunque numeros repræsentent litteræ A & B; atque similiter semper æquales, vel eiusdem valoris numeros haberi, siue numero A addatur numerus negatiuus B: siue ex numero A subtrahatur numerus positiuus B. Quod cum verissimum sit, atque satis manifestum, ex ipso conceptu numerorum, quos appellamus positiuos & negatiuos: etiam manifestum est, quomodo in ipsa Logistica additione accedente sola signi mutatione (per quam numerus ex positiuo fit negatiuus, vel ex negatiuo fit positiuus) habeatur aliquid planè æquiualens subtractioni. Quandoquidem igitur Additio Logistica deriuetur ex vulgari Arithmetica, vt iam ostendimus: & insuper ex eadem vulgari Arithmetica deriuentur numeri nostri positiui & negatiui, vt dictum est in præcedenti reflexione: satis patet quomodo ex vulgari Arithmetica originem habeat, quod vt ita dicam resultat ex additione Logistica, atque numeris

nostris positiuis & negatiuis; tale verò est illud, quod in Logistica præscribitur pro subtractione, siue Logisticæ nostræ subtractio, in qua præscribitur, vt in numero subtrahendo mutetur signum, ac deinde addatur alteri numero, ex quo subtractus repræsentari debet; etenim duorum numerorum additio, accedente vnius signi mutatione, planè æquiualet subtractioni, in qua subtrahitur numerus cuius signum mutatur: vt paulo ante hic notauimus.

Breuiter hic exposuimus, quomodo ex vulgari Arithmetica deriuata sit Logisticæ nostræ subtractio, proposita capite secundo lib. 1. Logisticæ. Operæ pretium videtur, notare alium modum, quo ex vulgari Arithmetica deriuari poterat subtractio planè diuersa ab illa quam adhibemus: sed tamen non diuersa quoad ipsam scriptionem. Integrum nobis erat assumere signum †, vt compendiate repræsentaret vocem plus: & signũ — assumere vt compendiate repræsentaret vocem minus: atque insuper statuere, vt duæ illæ voces signis † vel — repræsentatæ retinerent eamdem significationem, quam habent ad longum scriptæ. Quo posito, quemadmodum in vulgari Arithmetica, 4 plus 3, per genitores indicat productum additionis, & similiter, 4 minus 3, per genitores indicat productum subtractionis: ita etiam scriptio, 4 † 3, per genitores significasset productum additionis: & scriptio, 4 — 3, per genitores significasset productum subtractionis; & consequenter, quemadmodum in vulgari Arithmetica 4 minus 7 est aliquid impossibile, siue chimæricum: etiam concedendum erat 4 — 7, esse aliquid impossibile siue chimæricum: atque adeo vel huiusmodi scriptio admittenda non erat, vel certe admittendi erant numeri chimærici, atque ipso nihilo minores. Nisi fallor, modo hic insinuato, ex vulgari Arithmetica deriuantur scriptiones, in quibus signis † & — vtuntur Algebræ scriptores: quandoquidem admittant numeros ipso niholo minores, vt ipsi met expresse fatentur, & multis exponunt istos numeros chimæricos, atque illorum vtilitatem extollunt. Hos numeros chimæricos, atque ipso nihilo minores non admittit nostra Logistica: quemadmodum non admittit vltimo loco propositam deriuationem scriptionum, in quibus signa † & — adhibentur; quare, tametsi Algebræ, & Logisticæ nostræ communia sint signa † & —: & etiam voces plus & minus, quibus signa ista enuntiantur: tamen inter Algebram & Logisticam nostram intercedit maxima differentia, dependens ab ipsis signis † & —: siquidem in Logistica nostra habeant significationem, planè diuersam à significatione quam habent in Algebra. Etenim, scriptio, 4 — 7, tam in Algebra, quàm in Logistica, legitur quatuor minus septem: verum in Algebra significatur

gnificat idem, ac ſi diceretur, productum ex ſeptem vnitatibus poſitiuis, ſublatis ex quatuor vnitatibus poſitiuis. In Logiſtica noſtra ſignificat idem, ac ſi diceretur, quatuor vnitates Poſitiuæ ſimul cũ ſeptem vnitatibus negatiuis. Quandoquidē igitur maxime differant inter ſe duæ propoſitiones, quarum prima ſit, productũ ex ſeptem vnitatibus poſitiuis ſublatis ex quatuor vnitatibus poſitiuis: ſecunda ſit, productum ex quatuor vnitatibus poſitiuis ſumptis ſimul cum ſeptem vnitatibus negatiuis: manifeſtum eſt ſcriptionem, 4 — 7, planè diuerſa ſignificare, in Algebra, & Logiſtica noſtra: licet vtrobique enuntietur per eaſdem voces, quatuor minus ſeptem. Quanta ſit, prædictarũ duarum propoſitionum diuerſitas melius intelliges, ſi aduertas: primo, primam propoſitionem per genitores indicare productum ſubtractionis: ſecundam propoſitionem per genitores indicare productum additionis. Secundo, primam propoſitionem non agere de vnitatibus negatiuis; ſecundam agere de vnitatibus negatiuis. Tertio, primam propoſitionem indicare productum ex ſubtractione impoſſibili in vulgari Arithmetica: ſecundam indicare productum ex additione poſſibili in vulgari Arithmetica. Quarto, primam propoſitionem indicare numerum chimæricum, atque ipſo nihilo minorem, & planè incognitum in vulgari Arithmetica: ſecundam propoſitionem indicare numerum, verum, realem, ac paſſim cognitum in vulgari Arithmetica.

Hæc obiter notare volui, vt appareat, quantum à veritate aberrent, qui ſtatuunt, meam logiſticam Algebram eſſe ex eo capite, quod tam in mea Logiſtica, quam in Algebra, ſigna † & —, in ſcriptione adhibeantur, atque iiſdem vocibus enuntientur. Certè ſi huiuſmodi, vel temerarij, vel parum prudentes iudices, ſaltem voces intelligerent, tum in Logiſtica, tum in Algebra vſitatas: potius oppoſitum ſtatuerent: nimirum Logiſtcam noſtram Algebram non eſſe: quandoquidem in mea Logiſtica, & Algebra, etiam iiſdem ſcriptionibus, & vocibus planè diuerſa ſignificentur. Cæterum non nego me Algebram ſcripſiſſe, quandoquidem enim nunquam inuenire potuerim eius definitionem, non ſatis ſcio quid ſit Algebra. Præterea quod pro mea Logiſtica nihil deſumpſerim ex Algebra, alia cauſa non eſt, quam quod Algebræ proprium nihil inuenerim, quod mihi arrideret: aut conueniret tenuitati ingenij mei; neque per hoc aliquid derogatur excellentiæ ipſius Algebræ: quæ pro ſe habet tot doctiſſimorum hominum ſuffragia, vt pro meis lucubrationibus, vel ex ipſo titulo non vulgare ornamentum ſperare poteram, ſi inſcribi potuiſſent, Algebra ſpecioſa. Verum

malui

malui tam ſpecioſo ornamento carere apud indoctos: quam à doctioribus merito reprehendi, quod cum titulo opuſculũ non conueniret.

Notare hæc volui, etenim Logiſticæ ſtudioſo, maximè proderunt, quando aliquem ex tripode pronuntiantem audiet, me Algebram ſcripſiſſe; vt inferat huiuſmodi Apollinem, ne quidem aſſequutum terminos vſitatos in Algebra, atque noſtra Logiſtica. Ex hoc deorum genere inueniuntur plures: atque adhuc nuperrime nactus ſum in Mathematicis inſtructorem aliquem: nomen ſcire non potui: ſi nomen ſcirem, tamen hic prætermitterem: neque enim nominare conſueui, quos laudare non poſſum: ſolam veritatem propugnare contendo, cui non aduerſantur, aut nomina aut perſonæ, ſed falſæ, atque erroneæ aſſertiones: his veritatis hoſtibus tantummodo infenſus ſum, atque contrarius. Prædictus meus inſtructor per varias manus ad me ſcriptum miſit, præferens hoc exordium. *Nimio me honore dignatus es vir eximie, cum mihi Logiſticam miſiſti N. N. cui nullum Mathematicum problema inſolubile: exquirens inſuper meum de illa iudicium &c.* His præmiſſis, vaticinia incipit Apollo, iam nunc præſagus quid ſubſequi debeat priores Logiſticæ libros. Deinde aſſignat mihi authores quos legere debeam, vt intelligam, quam præſtantem vſum habeant numeri chimærici, nihilo minores: imaginaria numerorum latera &c. Poterat has merces diſtrahere apud Poëtas, quid mihi cum fabulis? inſtat tamen, hæc adhiberi in Algebra: quodque in Belgio, & Gallia idem ſignificet Logiſtica, & Algebra: Grammatico dignum argumentum! pro ſe citare poterat Lexicon, aut Calepinum, ſi vox Algebra illic fuiſſet annotata; miſerum me ſi legiſſet poſtremas lineas appendicis libri ſecundi Logiſticæ: vbi monui, voces plus, & minus, correſpondentes ſignis † & —, non ſignificare illud, quod ſignificant apud Grammaticos, quod idem hic paulo ante annotaui: atque addidi, in noſtra Logiſtica, & aliorum Algebra, habere diuerſam ſignificationem; quod qui non percipit, certè vel in Logiſtica, vel in Algebra maximè vſitatos terminos, non aſſequitur; optarem, vt hæc altiſſimè inhærerent diſcenti noſtram Logiſticam, vt quando audiet aliquos pronuntiantes, Logiſticam noſtram Algebram eſſe, neque ignorantum more hæſitabundus, pronuntiatis acquieſcat: neque etiam grammaticorum more, de ſola voce inſtituat litem: ſed inquirat, quid per Algebram intelligant; an ſcilicet de illa Algebra ſermo ſit, quæ admittit, atque aſſumit chimæras: vt ſunt numeri nihilo minores: imaginaria numerorum latera: plures quam tres quantitatis dimenſiones: proportio æqualitatis nihilo comparata, atque adeo non admiſſa inter proportiones, quemad-

admodum nihil non admittitur inter numeros: hoc (vt ita dicam) proportionis nihilo aliæ proportiones minores &c. Certè qui ſtatuit huiuſmodi Algebram conuenire cum noſtra Logiſtica, prima Logiſticæ noſtræ principia non percepit. Si verò per Algebram nihil intelligant, niſi antiquiorem Arithmeticam, atque Geometriam aliquantulum ampliatam, independenter ab omni ſubſidio deſumpto à chimæricis quantitatibus, aut proportionibus, falſo non aſſerit noſtram Logiſticam eſſe Algebram: Sed tamen hoc caſu, vox Algebra, erit æquiuoca: atque non minus verum erit Logiſticam noſtram non eſſe Algebram, quam Logiſticam noſtram eſſe Algebram, certum enim eſt inueniri opera in quibus priori ſenſu Algebra intelligitur: an ſimiliter opera inueniantur, in quibus poſteriori ſenſu intelligitur Algebra, ſtatuant alij: priori tantum ſenſu intelligendo Algebram, omninò falſum exiſtimo, Logiſticam noſtram Algebram eſſe. An Logiſtica noſtra Algebram aſſequatur, aut ſuperet, vel certè illi poſtponenda ſit: non eſt meum ſtatuere; non vulgari laude dignam eſſe Algebram vltro concedo: tamen vt alibi dixi apparatum eius omni ex parte non approbo:

REFLEXIO V.

Singula, quæ libro primo noſtræ Logiſticæ circa numeros logiſticos traduntur, in capitibus quæ ſecundum ſequuntur, atque octauum præcedunt: vel circa numeros vulgares vſitata ſunt in vulgari Arithmetica, vel ex his deriuantur.

HAec reflexio amplectitur conſiderationem plurimorum capitum libri primi noſtræ Logiſticæ: de ſingulis enim pauca notanda ſunt.

Primo. Propoſitis duobus numeris vulgaribus eiuſdem ſpeciei, inuenire vnum numerum qui duobus iſtis numeris: ſimul ſumptis æquiualeat, ſiue æqualis ſit: vſitatum eſt in vulgari Arithmetica: hoc enim eſt quod docet additio vulgaris. Similiter prima pars capitis tertij noſtræ Logiſticæ, tradit praxim inueniendi vnum numerum qui ſit æqualis, ſiue æquiualens, duobus aut pluribus numeris logiſticis inter ſe ſimilibus. In hac praxi nihil traditur, quod ſatis immediatè non pateat, aut ex ipſa intelligentia logiſticorum numerorum, aut ex vulgari additione, aut ſubtractione.

Secun-

Secundo. Quemadmodum in vulgaris Arithmeticæ multiplicatione, docetur modus inueniendi vnum numerum, exhibentem productum, quod oritur ex duobus numeris vulgaribus simul multiplicatis: ita etiam pars secunda capitis tertij nostræ Logisticæ, proponit praxim, qua inueniri potest vnus numerus, exhibens productum, quod oritur ex duobus numeris Logisticis simul multiplicatis. In hac praxi duo traduntur: quorum primum est, noui numeratoris inuentio; secundum est, inuentio signi quo nouus numerator affici debet. Primum nihil requirit præter vulgarem multiplicationem: atque adeo nullam difficultatem annexam habet. Alterum neque immediatè patet ex intelligentia Logisticorum numerorum, neque ex vulgari Arithmetica. In vulgari Arithmetica: debita multiplicata per debita, producunt debita; quandoquidem igitur à nobis numeri negatiui debitis comparentur, conformiter ad vulgarem Arithmeticam numerus negatiuus ductus in numerum negatiuum, deberet producere numerum negatiuum: & tamen prædicto loco statuitur, Logisticæ nostræ numerum negatiuum ductum in alium numerum negatiuum, producere numerum positiuum; cur hoc verum sit, non satis immediatè apparet ex ipsa intelligentia numerorum qui à nobis appellantur positiui, aút negatiui; atque eodem modo non satis apparet, quare duo numeri, quorum vnus positiuus alter negatiuus est simul multiplicati, semper producant numerum negatiuum: neque producere possint numerum positiuum. Huius rei demonstrationem inuenies in idea logisticæ pagina 62.

Tertio. In tertia parte capitis tertii Logisticæ proponitur praxis, continens modum inueniendi vnum numerum, qui sit productum ex diuisione instituta circa duos numeros Logisticos: omnino respondens praxi traditæ in secunda parte eiusdem capitis; atque vtrique praxi commune est, quod præscribitur circa signum, quo affici debet productum; alterum in quo differunt prædictæ istæ praxes, difficultatem annexam non habet: quemadmodum enim in priori adhibetur vulgaris multiplicatio, ita in posteriori adhibetur vulgaris diuisio. Quoniam verò in vulgari Arithmetica passim proposita diuisio non sufficit, vt inueniatur productum, Exempli gratia, ex numero 24 plus 12 diuiso per 4 plus 2, nisi prius diuisor ex duobus numeris constans reducatur ad vnum numerum: monui, præscripta in dicta praxi non sufficere, vt facilè absoluatur proposita diuisio. Cæterum citra prædictam diuisoris reductionem, propositam diuisionem absoluere: non excedit limites Arithmeticæ vulgaris. Etenim inquirendo, Exempli gratia, quoties maior ex duobus diuiso-

uiſoris numeris, nimirum 4, contineatur in maiori ex duobus numeris diuidendis, nimirum in numero 24: inuenietur aliquis numerus, qui in propoſito caſu erit *6*; iam verò, ſi inuentus numerus ductus in totum diuiſorem, auferri poſſit, ex toto numero diuidendo: & tamen non relinquat reſiduum æquale, vel maius, toto diuiſore: inuentus numerus, cum reſiduo inuento ipſi adſcripto, vt docetur in diuiſione vulgari, conſtituet productum quæſitum; ſi inuentus numerus, ductus in totum diuiſorem, auferri non poſſit ex toto numero diuidendo: erit maior producto quæſito; ſi auferri poſſit, ſed relinquat reſiduum æquale, vel maius, toto diuiſore: erit minor producto quæſito. Sic in caſu propoſito, quia 4 continetur ſexies in numero 24, & 6 ductum in 4 dat 24: atque inſuper 6 ductum in 2 dat 12: & denique 24 plus 12 auferri poteſt ex 24 plus 12, neque vllum relinquit reſiduum; 24 plus 12 diuiſum per 4 plus 2, producit 6. Similiter, ſi numerus 28 plus 13 diuidendus ſit per 4 plus 2: quia 4 continetur ſexies in numero 28: & 6 ductum in 4 dat 24: atque inſuper, 6 ductum in 2 dat 12: & denique, 24 plus 12 auferri poteſt ex 28 plus 13, ſic vt reſiduum ſit 5: verum erit, numerum 28 plus 13 diuiſum per 4 plus 2 producere $6\frac{5}{4 \text{ plus } 2}$ hoc eſt $6\frac{5}{6}$. Singula hæc, ſatis immediate inferuntur ex dictis de vulgari diuiſione: quia tamen in vulgari Arithmetica paruam planè vtilitatem habent, expreſsè non proponuntur: atque hic tantum propoſita ſunt, vt conſtet, vulgaris Arithmeticæ limites non excedere prædictas diuiſiones, abſque reductione diuiſoris compoſiti ex duobus numeris vulgaribus.

Quarto, In quarta parte capitis tertij nihil aliud requiritur, quam inuentio cuiuſuis radicis, propoſiti vulgaris numeri, qui talem radicem habeat: neque nouum eſt in vulgari Arithmetica, inuenire propoſiti vulgaris numeri radicem, quam nos primam vel ſecundam appellamus: quare ſuppoſito quod vulgaris Arithmeticæ ſcriptores, expreſsè non doceant, niſi vulgaris numeri eam radicem inuenire, quæ à nobis prima aut ſecunda dicitur: adhuc verum erit, quod in hac quarta parte capitis tertij, vel etiam in appendice libri primi Logiſticæ, non proponamus niſi vulgarem Arithmeticam, aliquantulum ampliatam.

Quinto. In quinta parte capitis tertij, nihil vt ita dicam noui proponitur: ſed tantum notatur, quomodo per ea quæ continentur præcedentibus eiuſdem capitis partibus, contrahi poſſint longiores Logiſticæ ſcriptiones: atque inueniri, numerus minus compoſitus, æquiualens alteri magis compoſito.

Sexto. In quarto capite libri primi, proponitur Antitheſis, quæ nihil aliud docet, quam ex vna æquationis parte, mutato ſigno, transferre numerum, ad partem oppoſitam. Iam verò, ex ipſa intelligentia numerorum, quos poſitiuos, aut negatiuos appellamus: ſatis conſtat, vnum numerum ſub contrario ſigno alteri addere: æquiualenter idem eſſe, ac numerum cuius ſignum mutatur, ab altero auferre; (qua de re, ſatis multa dicta ſunt in præcedenti reflexione, quando egimus de Logiſtica ſubtractione) ex quo patet, in Antitheſi, æquiualenter, ab æqualibus æqualia auferri, vt iterum habeantur æqualia. An forte nouum eſt in vulgari Arithmetica, à duobus numeris inter ſe æqualibus, æquales numeros auferendo, inuenire duos alios numeros inter ſe æquales? praxis, qua hoc fit in vulgari Arithmetica, non aliter differt à praxi, qua idem fit in Antitheſi: quam ſubtractio vſitata in vulgari Arithmetica, differt à ſubtractione Logiſtica, vt ſatis conſtat ex ijs quæ circa Logiſticam ſubtractionem notauimus in præcedenti reflexione.

Septimo. In quinto capite libri primi, traditur, quomodo per ea, quæ tertio aut quarto capite proponuntur, longiores ſcriptiones Logiſticæ, reduci poſſint ad magis compendiatas, atque prioribus æquiualentes: atque adeo in hoc quinto capite nihil proponitur nouum, atque diuerſum ab ijs, quæ traduntur præcedentibus capitibus; ſed tantum notatur aliqua commoditas, reſultans ex ijs, quæ prius tradita ſunt.

Octauo. Si rectè conſideres, quæ traduntur capite ſexto aut ſeptimo libri primi, nihil propemodum inuenies, niſi vſum regulæ aureæ, maxime notum in vulgari Arithmetica: præſuppoſita tamen ſcriptionum Logiſticarum notitia; vel certè cum ipſa regula aurea adhibitas aliquas praxes capitum præcedentium.

Quæ hactenus annotauimus, mihi videntur ſufficere, vt conſtet, in tertio, quarto, quinto, ſexto, & ſeptimo capite, libri primi Logiſticæ, tradita circa numeros Logiſticos, in vulgari Arithmetica vſitata eſſe circa numeros vulgares: aut ex his deriuari.

Circa octauum caput libri primi Logiſticæ nihil occurrit notatu dignum, continet enim definitiones, aut alia aliqua principia noſtræ Logiſticæ.

RE-

REFLEXIO VI.

Regula Logisticæ, nihil continet, quod in vulgari Arithmetica vsitatum non sit, circa numeros vulgares: atque hinc satis manifestum est, quomodo deriuetur ex vulgari Arithmetica.

QVemadmodum operationes Logisticæ, differunt ab operationibus vulgaris Arithmeticæ: ita propemodum Logisticæ regula, differt ab ijs, quæ maximè vsitata sunt in vulgari Arithmetica. In Logisticis operationibus, fiunt circa numeros Logisticos: quæ vulgaris Arithmetica docet circa numeros vulgares; pari modo, quod in Logisticæ regula præscribitur circa numeros Logisticos: in vulgari Arithmetica vsitatum est circa vulgares numeros. Vt hoc constet, prius considero singulas partes regulæ Logisticæ; deinde totum ordinem quem præscribit hæc regula; etenim, si neque in partibus, neque in ordine quo partes sibi succedunt, aliquid inueniatur, quod circa vulgares numeros vsitatum non sit apud eos, qui vtuntur vulgari Arithmetica: etiam constabit quomodo Logisticæ nostræ regula, deriuata sit ex vulgari Arithmetica.

Primum Logisticæ nostræ regulæ præscriptum est: vt obseruetur aliquis numerus, ex cuius cognitione dependeat solutio quæstionis, quæ proponitur. An forte apud eos, qui vulgari Arithmetica vtuntur, nouum est, considerando quæstionem propositam, reflectere, ex quo dependeat eius solutio? Si Arithmetico proponatur numerus indicans 120 Iulios, reducendus ad numerum æquiualentem, atque indicantem Scuta; vel petatur, quot Scuta constituant 120 Iulij; non facilè inuenies aliquem tam rudem, qui statim considerando propositam quæstionem, non aduertet, ipsi sciendum esse, quot Iulij æquiualeant vni Scuto: ac petat hoc sibi indicari, si fortè nesciat 10 Iulios æquiualere vni Scuto. Igitur nouum non est in vulgari Arithmetica, considerando propositam quæstionem, reflectere ad aliquem numerum, ex cuius cognitione inferri potest quæstionis soluto: qualis numerus, in proposito exemplo, est numerus 10 Iuliorum vni Scuto æquiualens.

Secundum Logisticæ nostræ regulæ præscriptum est: vt quæstionis propositum exercendo per numerum assumptum, inueniatur æquatio, &c. Quid hoc præscripto magis commune in ea vulgaris Arithmeticæ regula, quæ falsi regula appellatur? In hac regula per

aſſumptum vulgarem numerum, quæſtionis propoſitum exercetur: idque in hunc finem, vt inueniatur numerus, qui propoſito ac cognito alicui numero æqualis ſit; quod cum ignorare non poſſit aliquis, qui practicam vulgarem Arithmeticam didicerit vlteriori expoſitione non indiget.

Tertium Logiſticæ noſtræ regulæ præſcriptum eſt: vt æquatio minus ſimplex, aut commoda, reducatur ad aliam magis ſimplicem aut commodam. Quid aliud fit, quando Exempli gratia in vnam ſummam colliguntur plures numeri Scutorum, Iuliorum, &c ſeparatim ſcripti? Etenim plura minora credita addere, atque in vnam ſummam colligere, aliud non eſt, quam æquationem conſiſtentem inter totum creditum, & plures minores numeros, reuocare ad ſimpliciorem, atque commodiorem æquationem, conſiſtentem inter to um creditum & vnum numerum illud indicantem.

Quartum Logiſticæ noſtræ regulæ præſcriptum eſt: vt inuenta ſimplicior æquatio reſoluatur, &c. Ex æquatione conſiſtente inter 20 Iulios & 2 Scuta, inuenire quot Scutis æquentur, ſiue æquiualeant 120 Iulij: eſt reſoluere priorem æquationem, Similiter pro ſimplicium æquationum reſolutione, quæ in Logiſticæ regula præſcribitur: nihil requiritur niſi regula aurea maxime vſitata in vulgari Arithmetica, quare in vulgari Arithmetica omni ex parte nouum dici non poteſt, quod præſcribitur in quarta parte regulæ Logiſticæ.

Ex his abunde conſtat, in nulla parte regulæ Logiſticæ præſcribi aliquid, quod vſitatum non ſit in Arithmetica vulgari. Reliquum eſt vt videamus, vtrum ex partibus ſimul poſitis reſultans, vt ita dicam tota regula, conſtituat complexum aliquod incognitum vulgari Arithmeticæ. In quem finem, placet hic proponere eamdem quæſtionem, quæ pro exemplo regulæ affertur in noſtra Logiſtica.

Quæſtio hæc eſt. *Vrbis præſidium milites continet, quorum numerus ignoratur, hoc tamen ſcitur, quod ſi præſidium tertia ſui parte augeretur, & inſuper centum accederent, haberet milites* 3000.

Quæſtio propoſita ſolui poteſt hoc diſcurſu. Facta hypotheſi, quod tertia pars præſidij ſint 10 milites: ergo totum præſidium erunt 30 milites: ergo 30 plus 10 æquantur 3000 minus 100: ergo 40 æquatur 2900; inuenta hac ſimplici æquatione, falſa tamen, eam reſoluo, dicendo, 40 producitur ex numero 10: numerus 2900 ex quo producitur? Vel, inuenio 40 milites, ſupponendo tertiam præſidij partem eſſe 10 milites: vt inueniam 2900 milites, quot milites debent contineri tertia parte præſidij? Inſtituendo regulam auream, inuenio 725; ex quo infero: ergo tertia pars præſidij, ſunt

ſunt 725 milites: adeoque totum præſidium ſunt 2175 milites.

Ego mihi perſuadeo, propoſitum diſcurſum nihil prorſus continere, quod ſuperet captum eorum, qui modice verſati ſunt in vulgari Arithmetica: cuius limitibus continentur longe difficiliora; immo totus diſcurſus nihil continet, præter falſi regulam, in forma Syllogiſtica propoſitam.

Si propoſitum hic diſcurſum, conferas cum diſcurſibus quibus cap. 9 libri primi Logiſticæ, infertur ſolutio propoſitæ quæſtionis: facile aduertes, vtrobique eodem modo obſeruari Logiſticæ regulam: immo vix inuenies differentiam, quæ aliunde reſultet, quam ex numeris Logiſticis aut vulgaribus; priores enim illic adhibentur, hic verò non adhibentur niſi vulgares numeri: Plura requiri non exiſtimo, vt intelligatur, diſcurſus ordinem, qui in Logiſticæ regula præſcribitur, nihil continere, quod ſuperet vſum vulgaris Arithmeticæ.

Quandoquidem ex ijs, quæ hactenus breuiter propoſuimus, conſtet, neque in vlla parte regulæ Logiſticæ, neque in ordine quo partes ſibi ſuccedunt, aliquid inueniri, quod in vulgari Arithmetica nouum ſit, atque diuerſum à ſcriptionibus, aut numeris aſſumptis in noſtra Logiſtica; ſatis manifeſtum eſt, vnde originem habeat; immo, non regulæ Logiſticæ, ſed potius Logiſticæ numeris, atque compendiatis ſcriptionibus, deberi ſingula, in quibus vulgaris Arithmeticæ vſum, ſuperat vſus Arithmeticæ traditæ in Logiſtica; quidquid enim in duplici illa Arithmetica, diuerſum eſt à compendiatis ſcriptionibus, aut quæ ex huiuſmodi ſcriptionibus reſultant: vtrique arbitror commune.

Quod in Logiſticæ regula præſcribitur, nihil aliud eſt, quam ordo diſcurſus, qui ſæpè commodus eſt, pro ſolutione problematum, atque ijs præſcribitur qui recenter accedunt ad Logiſticam. Partes regulæ Logiſticæ, ſubinde omnes, ſubinde tantum aliquæ vtiles ſunt: quemadmodum in regula aurea præſcriptæ partes, ſubinde omnes, ſubinde tantum aliquæ vtiles ſunt; Exempli gratia, in regula aurea præſcribitur multiplicatio, & diuiſio, tamen inutilis eſt diuiſio, ſi ex datis tribus numeris, primus, eſt vnitas ſimplex; pari modo inutilis eſt multiplicatio, ſi ex datis tribus numeris, ſecundus vel tertius eſt vnitas ſimplex. Rurſus licet in regula aurea abſolutè præſcribatur, vt prius ſecundus numerus per tertium multiplicetur, ac deinde productum diuidatur per primum numerum: illud tamen neceſſario obſeruandum non eſſe, patet ex ijs, quæ capite 8 notauimus: illic enim duos alios modos indicauimus, quibus inſtitui poteſt regula aurea. Pari modo tametſi ſæpè commodus ſit

totus

totus ordo præscriptus in regula Logisticæ, non ideo illicitum est ab hoc ordine recedere; immo quoties immediate, aut magis commode haberi potest æquatio, ad quam ordinantur priores regulæ partes: planè inutiliter adhiberentur: verùm quemadmodum huius generis monita negliguntur à scriptoribus Arithmeticæ vulgaris, ita etiam negliguntur in nostra Logistica.

REFLEXIO VII.

Ex propositis deriuationibus præcipuarum scriptionum nostræ Logisticæ, facilè infertur, reliquarum scriptionum deriuatio. Præterea licèt præcipua differentia, quæ inuenitur inter vulgarem & Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam, vel consistat in compendiatis scriptionibus, vel ex illis resultet: atque adeo parua videri possit differentia inter vulgarem & Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam; tamen parua non est Logisticæ nostræ vtilitas: quæ in parua, vt ita dicam, scriptionum diuersitate fundata est.

PRæcipua omnia quæ pertinent ad compendiatam scriptionem nostræ Logisticæ, proposita sunt in superioribus reflexionibus: in quibus nihil dictum est, de charactere =, qui compendiate repræsentat vocem *æquatur*, vel vocem *æquiualet*; vel de charactere ≏, qui compendiate repræsentat voces *quod etiam æquatur*, siue, *quod etiam æquiualet*; vel de charactere, o, quando compendiate repræsentat vocem *oppositum*; vel de paucis alijs eiusmodi characteribus; quandoquidem enim ostesum sit, in vulgari Arithmetica nullo modo nouum esse, sed communi vsu receptum, aut lineolas, aut alios characteres assumere, quibus compendiate voces repræsententur: satis manifestum est, quomodo nostra Logistica vulgarem Arithmeticam imitetur, in singulis illis characteribus, quos tantum assumit, vt compendiate repræsentet aliquas voces, quas compendiate repræsentare commodum est: vel quia frequenter recurrunt, vel quia ad longum scriptæ, causant aliquam molestiam, siue minorem commoditatem; quoniam verò, tales videntur characteres assumpti in nostra Logistica, de quibus non egimus in præcedentibus reflexionibus: etiam superfluum existimo, pluribus exponere, quomodo deriuentur ex vulgari Arithmetica.

Si re-

Si recte consideres præcipua illa capita in prima reflexione proposita, quibus diximus contineri, tum vulgaris, tum etiam Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam: atque his addas, quæ in secunda reflexione dicta sunt, de conuenientia, atque differentia numerorum qui considerantur in vtraque ista Arithmetica: non difficulter inferes, præcipuam differentiam quæ inuenitur inter vulgarem & Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam, haberi à compendiatis scriptionibus; quod si nobis ipsis fatentibus verum est, facile aliquis suspicari posset, atque inferre: ex tam parua differentia, magni momenti vtilitatem nasci, aut resultare non posse: quid hinc vlterius sequatur, nemo non videt. Verum ne ex erronea eiusmodi præmissa aliquis inferat, erroneas conclusiones, nobis contrarias: rogo vt meminerit, ex parua scintilla contempta maximum nasci posse incendiuum. Ex leui errore in principijs, sequi posse falsitates maxime enormes. Totius Arithmeticæ atque Geometriæ principia, pauca esse, & vt ita dicam satis contemptibilia, & obuia: tamen quam pulchræ, quam vtiles, quam sublimes, atque ab aliorum cognitione maximè remotæ veritates, solis Arithmeticis atque Geometris cognitæ, atque ex prædictis principijs deductæ inueniuntur? Practica Arithmetica vulgaris, decem notas assumit, vt compendiate repræsentet numeros: tolle has notas, & euertes vniuersam, vt ita dicam, vulgarem Arithmeticam practicam: quandoquidem, non tantum molestum, verum etiam propemodum impossibile sit, vulgaris Arithmeticæ operationes ac regulas instituere, circa numeros, qui neque planè parui sint, neque compendiatis scriptionibus repræsententur; quare si ex paucis compendiatis scriptionibus assumptis pro vulgari Arithmetica practica, resultet tota eius vtilitas, quam prudens nemo negare potest maximam esse: etiam paucæ aliæ compendiatæ scriptiones, assumptæ in nostra Logistica, atque additæ vulgaris Arithmeticæ compendiatis scriptionibus: tales esse possunt, ex quibus resultet vtilitas: tantam, aut etiam longe amplius superans, vulgaris Arithmeticæ vtilitatem: quantum, omnes Logisticæ nostræ scriptiones compendiatæ, siue characteres, superant decem vulgaris Arithmeticæ characteres, ipsi etiam Logisticæ communes. Verum huius loci non est pluribus agere de vtilitate, aut practicæ, aut speculatiuæ nostræ Logisticæ; de qua vt aliquid insinuem: suppono aliud esse Mathematicas veritates memoriter tenere, atque illarum sensum assequi: aliud verò esse, assequi quomodo Mathematicæ veritates cohęreant cum principijs, aut ex illis legitime deducantur: sed tamen non minus primum, quam secundum sufficere, vt aliquis dicatur intelligere Mathesim,

aut

aut Mathematicas veritates; quo ſuppoſito, habemus duos modos intelligendi Mathematicas veritates, ſiue duplicem Matheſeos intelligentiam; prior Matheſeos intelligentia ſufficit pro Hiſtorico: poſterior requiri videtur pro Mathematico; iam verò agendo de poſteriori illa Matheſeos intelligentia, quæ altera longo interuallo ſuperior eſt; eo tempore quo auditores mei, ſcriptam à me Logiſticam adhibuerunt: paſſim expertus ſum, paucorum menſium ſtudio in Arithmeticæ, Geometriæ, atque vniuerſæ Matheſeos intelligentia, maiorem progreſſum: quam aut ego fecerim, aut ab alijs fieri viderim, ſpatio plurium annorum. Hoc ſi verum eſt: de vtilitate noſtræ Logiſticæ ſatis multa, paucis indicaui. Quod verum ſit, adductis rationibus non aliter probari poteſt, quam reliquæ veritates quæ experientia diſcuntur. Quare, illi qui mihi fidem denegat, aliud replicare non poſſum, niſi, veni & vide. Si tamen aliquis paulo attentiùs perlegat noſtræ Logiſticæ Ideam, prius ſpeculatiue, ac deinde practice declaratam: fortaſſis, abſque alia experientia, non difficulter mihi præſtabit fidem. Nemo enim, vt opinor, ignorat: in qualibet ſcientia, maximum compendium afferre, pro pluribus concluſionibus magis reſtrictis, ſubſtituere vnam magis vniuerſalem, quæ reſtrictiores omnes ſimul amplectatur ſua amplitudine: atque ita plurima, paucis complecti. Quandoquidem igitur Logiſtica noſtra, huiuſmodi compendia ſubminiſtret, in veritatibus ad Matheſim ſpectantibus: nemo non videt, ex hoc capite maximum compendium reſultare poſſe in rebus Mathematicis. Deinde, ſi nihil ſit quod in ſcientijs maiorem claritatem afferat, quam remotis æquiuocationibus, clarè expoſita habere principia, quibus vtitur talis ſcientia: conſiderando, quod plurima Matheſeos principia, apud alios, aut neglecta, aut male expoſita, aut æquiuocationibus implicata: à nobis clare exponantur; vnuſquiſque facile concludet, nos non parum intelligibilitatis, ac luminis afferre rebus Mathematicis. Omitto cætera, quæ melius intelligi poterunt ex conſcripta à nobis Logiſticæ noſtræ Idea; etenim præcipuum ferè lumen, quod viua voce affero diſcentibus noſtram Logiſticam, dependet à duobus capitibus hic inſinuatis; ex primo, breuitas: ex altero, claritas reſultat; denique ex breuitate compoſita cum claritate, reſultare poſſe paulo ante annotatam Logiſticæ noſtræ vtilitatem, non videtur difficulter credibile. Quoniam verò inter Matheſeos principia numerantur definitiones, ſiue expoſitiones terminorum: atque ab ipſa expoſitione terminorum reſultet lumen, quod viua vox, affert meis auditoribus: mirandum non eſt, præter tenebras propemodum nihil videre in noſtra Logiſtica, qui illam conſiderant,

derant, neglecta terminorum expositione quæ à nobis affertur: atque terminis quibus vtimur, eam significationem attribuunt, quam ipsi somniantur: ex quo fit quod de Logistica nostra somniantibus proportionata proferant iudicia; verum quid huiusmodi somniatores statuant parum laboro; si vigilantior aliquis aduerterit me alicubi in errorem incidisse, moneri desidero, vt corrigam errorem meum; etenim in scribendo vltimus finis mihi propositus, alius non est, quam pro viribus prodesse quam plurimis.

Ad maiorem Dei gloriam.

APPENDIX
IN QVA
Luditur in numeris.
ARGVMENTVM.

Practica Arithmetica, non aliter melius discitur, quam exercitio: hoc est, frequenter instituendo Arithmeticas operationes; huic exercitio annexus labor, magna ex parte subleuatur, atque imminuitur, quando curiositate alliciente suscipitur. Quamobrem, tradita Arithmetica practica, addo ludos aliquos, pro quibus requiruntur diuersæ operationes Arithmeticæ, etenim Arithmeticæ candidati, examinando an in diuersis numeris semper vniformis sit ludorum successus, non minus vtiliter, sed fortassis minori tædio exercebuntur in operationibus Arithmeticis, quam si occupentur circa numeros, casu tantum, vel exercitij gratia propositos. Non tamen sine vllo delectu quoslibet ludos Arithmeticos propono, sed tantum aliquos, ad indicatum finem, deductos ex primo vel secundo vniuersali theoremate, proposito pagina 89. nostræ Logisticæ: vel certe ex conceptu diui-

 sionis,

ſionis, aut ex regula aurea. Ex ludis pro tyronibus propoſitis, pergo ad aliquas quæſtiones, ex ipſis ludis natas: ſed fortaſſis potius annumerandas maximè ſerijs Arithmeticorum conſiderationibus, quam candidatorum ludis. Denique pro quæſtionum reſolutionibus requiſita aliqua theoremata, propono, ac demonſtro: modo tamen, ſiue ſtylo vſitato in noſtra Logiſtica.

Pro ludis Arithmeticis, prius exhibeo quinque diuerſas praxes, alphabeti litteris ſubſcribendi vulgares numeros: deinde expono ludos circa ſcriptos numeros. Vbique aduertendum eſt, quod exempli gratia, per numerum A, intelligi debeat numerus litteræ A ſubſcriptus: ſiue numerus quem ex vi hypotheſis ſignificat littera A: quodque ſimiliter per numeros B, C, D, &c. intelligendi ſint numeri, iſtis litteris ſubſcripti: vel ex vi hypotheſis ſignificati per tales litteras. Deinde quod per priores alphabeti litteras, repræſentem numeros qui incogniti ſupponuntur, illi, qui ludum proponit: eidem cogniti numeri repræſentantur per poſteriores alphabeti litteras.

Praxis prima.

PRimo. Litteris A & B, ſingulis, pro libitu numerus aliquis ſubſcribatur. Secundo numeri A & B addantur, atque productum ſubſcribatur litteræ C. Tertio numerorum A & B minor à maiori ſubtrahatur, & productum ſubſcribatur litteræ D. Quarto numeri C & D addantur, & productum ſubſcribatur litteræ E. Quinto numerorum C & D minor à maiori ſubtrahatur, & productum ſubſcribatur litteræ F.

A	B
3	7
C	D
10	4
E	F
14	6

Exemplum numerorum ſcriptorum iuxta primam praxim, hic appoſitum habes: in hoc exemplo ſupponitur quod placuerit litteræ A ſubſcribere numerum 3: & litteræ B, placuerit ſubſcribere numerum 7. Ludi qui ſupponunt numeros ſcriptos iuxta hanc primam praxim, deriuantur ex theoremate primo vniuerſali, quod in noſtra Logiſtica proponitur pagina 89: atque ad numeros reſtrictum, aſſerit, quod qualeſcunque ſint numeri A & B, atque differentia numerorum A & B, ſit D: aggregatum vero numerorum A & B, ſit C: tunc numerorum A & B maiorem, æquari aggregato ex dimidio D & dimidio C; verum numerorum A & B, minorem æquari differentiæ dimidij D, & dimidij C.

Pra-

Praxis ſecunda.

PRimo. Litteræ A, pro libitu quiuis numerus ſubſcribatur, maior tamen quam ſit numerus X: quem numerum X ſibi pro libitu aſſumit, qui alteri præſcribit ordinem, quo ſingulis litteris numeros debet ſubſcribere, atque adeo præſcribenti cognitus ſupponitur. Secundo, numerus X addatur numero A, & productum ſubſcribatur litteræ B. Tertio, numerus X ſubtrahatur ex numero A, vel numerus A ſubtrahatur à numero X, & productum ſubſcribatur litteræ C. Quarto, numerus B addatur numero C, & productum ſubſcribatur litteræ D.

A	
16	
B	C
22	10
D	
32	
X	
6	

Exemplum habes hic appoſitum, in quo ſupponitur placuiſſe litteræ A ſubſcribere numerum 16; atque præſcribenti cognitum numerum X, eſſe 6. Ludi qui ſupponunt numeros ſcriptos iuxta hanc praxim, deriuantur ex eodem theoremate, ex quo diximus deriuari ludos, qui ſupponunt numeros ſcriptos iuxta primam praxim.

Praxis tertia.

PRimo. Litteræ A ſubſcribatur quiuis numerus pro libitu. Secundo, duplum numeri A, ſubſcribatur litteræ B. Tertio, triplum numeri A, ſubſcribatur litteræ C. Quarto, numerus B, addatur numero C, & productum ſubſcribatur litteræ D.

A	
13	
B	
26	
C	D
39	65

Exemplum appoſitum, ſupponit, placuiſſe litteræ A ſubſcribere numerum 13. Ludi in quibus ſupponuntur numeri ſcripti iuxta hanc praxim deriuantur ex conceptu diuiſionis, vt indicatur ad ſubſequentem praxim, in qua paulo vniuerſalius proponitur, quod hic magis reſtrictum eſt.

Praxis quarta.

PRimo. Litteræ A, quiuis numerus ſubſcribatur; atque à præſcribente aſſumantur quiuis duo numeri, quorum vnum hic ap-

pello X, alterum Z. Secundo numerus A ducatur in numerum X, atque productum subscribatur litteræ B. Tertio numerus A ducatur in Z, atque productum subscribatur litteræ C. Quarto numerus B addatur numero C, atque productum subscribatur litteræ D.

Habes appositum exemplum, in quo placuit litteræ A subscribere 7; atque pro numero X assumere 4; denique pro numero Z assumere 9. Ludi in quibus supponuntur numeri scripti iuxta hanc praxim, deriuantur ex conceptu diuisionis: ex quo conceptu, satis patet, quod qualescunque sint numeri A, X, Z, atque A *in* X † Z = C † B: etiam C † B *per* X † Z = A: & præterea C † B *per* A = X † Z.

A	
7	
B	D
28	91
C	
63	
X	Z
4	9

Praxis quinta.

PRimo. Litteræ A, subscribatur quilibet numerus, maior tamen numero X, assumpto à præscribente. Secundo numero A addatur numerus X, & productum subscribatur litteræ B. Tertio numerus A ducatur in numerum X, & productum subscribatur litteræ C. Quarto numerus B ducatur in numerum B, & productum subscribatur litteræ D. Quinto numerus C ducatur in numerum 4, & productum subscribatur litteræ E. Sexto numerorum D & E minor à maiori auferatur, & productum subscribatur litteræ F. Septimo inueniatur radix prima numeri F, atque subscribatur litteræ G.

In apposito exemplo, supponitur, placuisse litteræ A subscribere 7, & à præscribente, per numerum X intelligi 3. Ludi in quibus supponitur scriptio hic proposita, deriuantur ex theoremate secundo, quod in nostra Logistica proponitur pagina 89. In hoc theoremate docetur, qualescunque sint numeri, quorum maior A minor X: atque insuper X † A = B: & etiam X *in* A = C; necessario verum esse, quod A — X = 1 R 1 * B 2 — 4 C.

A	
7	
B	C
10	21
D	E
100	84
F	G
16	4
X	
3	

Primus ludus Arithmeticus.

In quo ex indicato vno alteroue ex scriptis numeris, inuenio alios.

PRimo. Suppositis numeris scriptis iuxta primam praxim, si mihi indices numeros E & F, sumendo singulorum istorum numerorum dimidium habebo duos alios numeros A & B. Sic quia in exemplo apposito primæ praxi, numerus E est 14, eius dimidium erit 7, siue numerus B; & quia numerus F erat 6, eius dimidium est 3, siue numerus A.

Secundo. Suppositis numeris scriptis iuxta secundam praxim, si mihi indices numerum D, sumendo eius dimidium inuenio numerum A In exemplo secundæ praxis numerus D est 32, sumendo eius dimidium habetur numerus A, qui est 16.

Tertio. Suppositis numeris scriptis iuxta tertiam praxim, si mihi indices numerum D, hunc diuidendo per numerum 5, inuenio numerum A. In exemplo tertiæ praxis, numerus D est 65, quem diuidendo per 5, inuenitur numerus A, qui est 13.

Quarto. Suppositis numeris scriptis iuxta quartam praxim, si mihi indices numerum D, hunc numerum diuidendo per aggregatum numerorum X & Z (qui numeri singuli supponuntur mihi cogniti) inuenio numerum A. In exemplo quartæ praxis numerus D est 91: & quia X est 4, atque insuper Z est 9, aggregatum X & Z erit 13: denique 91 diuidendo per 13, inuenitur numerus A, qui est 7.

Quinto. Suppositis numeris scriptis iuxta quintam praxim, si mihi indices numerum G, illi addendo numerum X (qui supponitur mihi cognitus) inuenio numerum A. In exemplo quintæ praxeos numerus G est 4, cui addendo numerum X qui est 3, habetur numerus A, qui est 7,

Secun-

Secundus ludus Arithmeticus.

In quo præſcribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta ſuperiores praxes ſcriptos, atque ex alijs aſſumptis numeris productos, vt iterum habeantur aſſumpti numeri.

PRimo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim: aſſero, quod diuidendo ſingulos numeros E & F per numerum 2, inuenies ſingulos numeros A & B. In exemplo primæ praxis numerus E eſt 14, quem diuidendo per 2, habetur numerus B qui eſt 7: præterea numerus F eſt 6, quem diuidendo per 2, habetur numerus A qui eſt 3.

Secundo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D, per numerum 2: ſiue ſumendo dimidium numeri D: habebis numerum A. In exemplo ſecundæ praxis numerus D eſt 32, ſumendo eius dimidium, habetur numerus A qui eſt 16.

Tertio. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum 5: ſiue ſumendo quintam partem numeri D: habebis numerum A. In exemplo tertiæ praxis, numerus D eſt 65: ſumendo huius numeri quintam partem, habetur numerus A qui eſt 13.

Quarto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam praxim: aſſero, quod deuidendo numerum D per aggregatum numerorum X & Z (qui duo numeri X & Z ſupponuntur mihi cogniti, adeoque illorum aggregatum mihi cognitum eſt, atque illud aſſigno pro diuiſore) inuenietur numerus A. In exemplo quartæ praxis, numerus D eſt 91: aggregatum numerorum X & Z eſt 13: denique numerum 91 diuidendo per numerum 13, habetur numerus A qui eſt 7.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim: aſſero, quod numero G addendo numerum X (qui numerus X mihi cognitus ſupponitur, atque illum aſſigno pro additione) inuenietur numerus A. In exemplo quintæ praxis numerus G eſt 4, cui addendo numerum X qui eſt 3, habetur numerus A qui eſt 7.

Tertius ludus Arithmeticus.

In quo præſcribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta ſuperiores praxes ſcriptos, vt habeatur aliquis numerus mihi cognitus.

PRimo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim: aſſero, quod diuidendo maiorem ex numeris E & F, per maiorem ex numeris A & B: habebis numerum 2; & ſimiliter diuidendo minorem ex numeris E & F, per minorem ex numeris A & B, inuenies numerum 2. In exemplo primæ praxis, maior ex numeris E & F eſt 14. hunc numerum diuidendo per maiorem ex numeris A & B, qui eſt 7: habetur numerus 2. Similiter minor ex numeris E & F, eſt 6: hunc numerum diuidendo per minorem ex numeris A & B, qui eſt 3: habetur numerus 2.

Secundo ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum 2. In exemplo ſecundæ praxis, numerus D eſt 32, quem diuidendo per numerum A qui eſt 16, habetur numerus 2.

Tertio. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum 5. In exemplo propoſito in tertia praxi, numerus D eſt 65: hunc numerum diuidendo per numerum A qui eſt 13, habetur numerus 5.

Quarto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum qui eſt aggregatum numerorum X & Z (quod aggregatum mihi cognitum eſt, quandoquidem ſinguli numeri X & Z ſupponantur mihi cogniti: ac propterea aſſignare poſſum quem numerum inuenies) quod aggregatum non in litteris, ſed in numero aſſigno. In exemplo quartæ praxis numerus D eſt 91: quem numerum diuidendo per numerum A qui eſt 7: habetur numerus 13, qui eſt aggregatum numerum X & Z, quandoquidem numerus X ſit 4, & numerus Z ſit 9.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim: aſſero, quod ex numero A ſubtrahendo numerum G, inuenies numerum X (qui numerus X ſupponitur mihi cognitus) atque numerum X non per litteram, ſed per numerum indicando, aſſigno numerum quem inuenies per ſubtractionem. In exemplo quintæ praxis, numerus

merus A eſt 7: ex hoc numero ſubtrahendo numerum G qui eſt 4, habetur numerus X qui eſt 3.

Quartus ludus Arithmeticus.

In quo præſcribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta ſuperiores praxes ſcriptos, vt habeatur numerus mihi aſſignatus, qualiſcunque ille ſit, exempli gratia numerus 25.

PRimo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim: aſſero, quod maiorem ex numeris E & F diuidendo per maiorem ex numeris A & B inuenies numerum, cui ſi addas 3, atque hoc productum ducas in ſe ipſum, habebis numerum 25. In exemplo primæ praxis maior ex numeris E & F eſt 14: & numerorum A & B maior eſt 7: quare 14 diuidendo per 7 habetur numerus 2: huic numero addendo 3, habetur numerus 5: denique numerum 5 ducendo in numerum 5, habetur numerus 25.

Secundo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, cui ſi addas 7, atque hoc productum ſubtrahas ex numero 34, habebis numerum 25. In exemplo ſecundæ praxis, numerus D qui eſt 32, diuiſus per numerum A qui eſt 16, producit numerum 2: cui addendo 7 habetur 9: denique ex numero 34 ſubtrahendo numerum 9, habetur numerus 25.

Tertio. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, quem ducendo in ſeipſum habebis numerum 25. In exemplo tertiæ praxis, numerus D eſt 65: quem deuidendo per numerum A qui eſt 13, habetur numerus 5: & numerus 5 ductus in numerum 5 producit 25.

Quarto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam praxim: quodque aggregatum numerorum X & Z mihi cognitum ſit 13: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, cui addendo 12 habebis numerum 25. In exemplo quartæ praxis, numerus D eſt 91: quem diuidendo per numerum A qui eſt 7, habetur numerus 13: cui addendo numerum 12 inuenitur numerus 25.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim, quodque numerus X mihi cognitus ſit 3: aſſero, quod ex numero A ſub-

trahendo numerum G inuenies numerum, cui addendo numerum 22, inuenies numerum 25. In exemplo quintæ praxis numerus A est 7, ex hoc numero subtrahendo numerum G qui est 4, habetur numerus 3, cui addendo 22 habetur numerus 25.

Nota primo. Ludos Arithmeticos parum prodesse apud eos, qui ludos non ignorant; deinde magis placere quo minus apparet quomodo fiat quod vident fieri. Hinc tertio ludo quartum addidimus, qui vt ita dicam, quo ad substantiam, à tertio non differt: sed ab illo tantum differt, quo ad aliquod condimentum; etenim tam in tertio, quam in quarto ludo, per aliquot operationes institutas circa numeros, saltem magna ex parte mihi incognitos, efficio, tv habeatur numerus mihi cognitus; hunc numerum, in tertio ludo immed ate indico: atque adeo tertius ludus simplicior est, & si sæpius repetatur, minus difficulter aduerti potest eius fundamentum; verum in quarto ludo vlterius adduntur aliqua, quæ talia sunt, vt apud eos, qui ludum nouerunt, manifestum sit & quare fiant, & quam diuersimode fieri possint: verum apud eos, qui ludum ignorant, tales tenebras causare possunt, vt nullum in ludo cohærentiam aduertant: atque adeo ludum reddant magis inperceptibilem, atque gratiorem.

Nota secundo. Quemadmodum hic quinque modis diuersis effeci, vt ex numeris maxima ex parte mihi ignotis, semper habeatur idem numerus 25; ita effici posse vt habeatur quiuis alius numerus: & quomodo id fieri possit, videtur tam manifestum, vt vlteriori declaratione non indigeat, etiam apud eos, qui non nisi mediocriter versati sunt in vulgari Arithmetica practica: quibus ignotum esse non potest, quid fieri possit circa cognitum aliquem numerum, vt habeatur alius numerus etiam cognitus: etenim præter hoc vnum, nihil in hoc quarto ludo proponitur diuersum ab ijs, quæ in tertio ludo proponuntur.

Quintus ludus Arithmeticus.

In quo præscribitur, quid fieri debeat circa numeros iuxta superiores praxes scriptos, vt habeatur numerus K, ab alio mente conceptus, atque mihi incognitus.

PRimo. Suppositis numeris scriptis iuxta primam praxim: hæc vlterius præscribo. Primo, vt minor numerorum E & F, diuidatur per minorem numerorum A & B, atque productum subscribatur litteræ G. Secundo, ego assumo aliquem numerum R, exem-

pli gratia 5, & iubeo vt numerus K mente conceptus deuidatur per numerum 5 ſiue R, atque productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio vt triplum numeri 5 ſiue R, diuidatur per numerum G, & productum ſubſcribatur litteræ L. Quarto vt numerus H ducatur in numerum L, & productum ſubſcribatur litteræ M. His peractis, aſſero, quod ſi ex numero M auferas tertiam partem, reſiduum erit numerus K, abs te mente conceptus. Pro exemplo ſuppono numeros ſcriptos vt in prima praxi repræſentantur, atque conceptum abs te numerum eſſe 45, His poſitis,numerus G erit 2: item numerus H erit 9: item numerus L erit $7\frac{1}{2}$: item numerus M erit $67\frac{1}{2}$, à quo auferendo tertiam partem, quæ eſt $22\frac{1}{2}$, habetur numerus 45, hoc eſt numerus *K*.

Secundo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim, hæc vlterius præſcribo. Primo vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum ſubſcribatur litteræ G. Secundo, ego aſſumo aliquem numerum R, exempli gratia 7, & iubeo vt numerus K mente conceptus, diuidatur per numerum 7 ſiue R, atque productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio, vt triplum numeri 7 ſiue R, diuidatur per numerum G, & productum ſubſcribatur litteræ L. Quarto vt numerus H ducatur in numerum L, & productum ſubſcribatur litteræ M. His peractis, aſſero, ſi ex numero M auferas tertiam partem, reſiduum erit numerus K abs te mente conceptus. Pro exemplo ſuppono numeros ſcriptos vt repræſentantur in ſecunda praxi, atque conceptum abs te numerum K eſſe 56. His poſitis, numerus G erit 2: Item numerus H erit 8: item numerus L erit $10\frac{1}{2}$: item numerus M erit 84, à quo auferendo tertiam partem quæ eſt 28, habetur numerus 56, hoc eſt numerus K.

Tertio. ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim; hæc vlterius præſcribo. Primo, vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum ſubſcribatur litteræ G. Secundo ego aſſumo aliquem numerum R, exempli gratia 7, & iubeo vt numerus G diuidatur per 7 ſiue R, & productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio, vt numerus K diuidatur per numerum H, & productum ſubſcribatur litteræ L. His peractis, aſſero, quod numerum H ducendo in numerum L, inuenies numerum K à te mente conceptum. Pro exemplo, ſuppono numeros ſcriptos vt repræſentantur in tertia praxi, atque conceptum numerum K eſſe 30. His poſitis, numerus G erit 5: item numerus H erit $\frac{5}{7}$: item numerus L erit 42: denique numerus H ſiue $\frac{5}{7}$ ducendo in numerum 42, habetur numerus 30, hoc eſt numerus K.

Quarto, ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam prixim, hæc vlterius præſcribo. Primo vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum ſubſcribatur litteræ G. Secundo, vt numerus *K* diuidatur per numerum G, atque productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio, ego aſſumo aliquem numerum R, exempli gratia 3, & iubeo vt numerus H ducatur in numerum R, atque productum ſubſcribatur litteræ L. Quarto vt numerus G diuidatur per numerum 3 ſiue R, & productum ſubſcribatur litteræ M. His peractis, aſſero, quod numerum L ducendo in numerum M, inuenies numerum *K* à te mente conceptum. Pro exemplo ſuppono numeros ſcriptos vt repræſentantur in quarta praxi, atque conceptum à te numerum *K* eſſe 40. His ſuppoſitis, numerus G erit 13. item numerus H erit $3\frac{1}{13}$: item numerus L erit $9\frac{3}{13}$: item numerus M erit $4\frac{1}{3}$: denique numerum L, hoc eſt $9\frac{3}{13}$, ducendo in numerum M hoc eſt $4\frac{1}{3}$, inuenies numerum *K* hoc eſt 40.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim, hæc vlterius præſcribo. Primo, vt litteræ G ſubſcribatur idem ille numerus, qui in quinta praxi vocatur G: vel quiuis alius iuxta quintam praxim ſcriptus, aut ex illis vtcunque productus: vel denique quiuis numerus pro libitu aſſumptus. Secundo, vt fiant quæ hic præſcripſimus ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam, vel quartam praxim: vtrouis enim modo prodibit numerus *K* à te mente conceptus.

Quæ in hoc quinto ludo Arithmetico præſcribuntur dependent à regula aurea, non tamen inſtituta priori modo quo docetur capite 8 huius opuſculi, quemque illic notauimus commodiorem eſſe: ſed à regula aurea inſtituta, ſecundo, aut tertio modo inſinuato in ſupra citato capite: vel certe à regula aurea, quæ mediante ſola diuiſione abſoluitur. An alij Arithmetici aduerterint, vel ſola diuiſione, vel ſola multiplicatione in quouis caſu abſolui poſſe regulam auream, prorſus ignoro: apud neminem id notatum inueni; quapropter vtrumque illum modum inſtituendi regulam auream ſub quæſtionis titulo propono; prius tamen pauca aliqua inſinuanda ſunt circa propoſitos ludos Arithmeticos.

Ludus Arithmeticus gratior eſt, quo meliori modo proponitur; inſinuatis ludis Arithmeticis aliunde petita ornamenta addere nolui, tum ne eſſem longior, tum etiam ne videar potius iocari, quam ſerio ludere; ego certe inutiles aut pueriles iocos non apprehendo in ludis propoſitis: etenim vtile dulci miſcendo, diſcentium profectum curare: non eſt pueriliter iocari; iam vero, quo fine ludos

Arithmeticos proposuerim, satis insinuaui initio huius appendicis. Deinde ipsos ludos, legitimo discursu deducere ex fontibus ex quibus deriuantur, tam facile non est, vt post mediocrem profectum dedeceat speculatiuæ Arithmeticæ studiosum. Præterea me non parum iuuant, vt commode, & plures simul, etiam aliquo modo inuitos traham ad examen, ex quo mihi sufficienter constet, quantum profecerint in practica Arithmetica; modum in vnico exemplo insinuo. Exempli gratia, pronuntio, quod si ex pluribus præsentibus singuli scribant numerum pro libitu, mihi ignotum: atque circa scriptum numerum instituant paucas operationes à me præscribendas; effecturum me, vt singuli (tametsi diuersum numerum scripserint) habeant eumdem, atque mihi cognitum numerum. Vel certe effecturum me, vt apud singulos vltimæ operationis productum, sit ille numerus, quem me inscio subscripserint litteræ *K*. Quando huiusmodi propositiones audiuntur, curiositas inuitat ad exprimentum; & paucos inuenies, qui nolint experientia discere veritatem: quam dum volunt experiri, nihil simile suspicantes, sese sistunt examini. Si prioris propositionis veritas probanda est, quartum ludum adhibeo; pro posteriori propositione adhibeo quintum ludum: atque ex diuersis modis quos singuli ludi admittunt, illum eligo, qui requirit operationes circa quas volo instituere examen. Denique, si dicant me aberrasse, certo concludo ipsos nescire præscriptas operationes; si dicant me non aberrasse, constat mihi, præscriptas à me operationes legitime ab ipsis institutas esse.

Paulo superius monuimus, quintum ludum hic propositum, deriuari ex regula aurea, de qua agitur capite 8 huius opusculi: vbi affertur triplex modus diuersus inueniendi numerum, quem per hanc regulam inquiri diximus; in singulis tamen modis præscribitur multiplicatio, & diuisio: atque ab his modis instituendi regulam auream, diuersus est aliquis modus, qui adhibetur in quinto ludo: quandoquidem non præscribat multiplicationem. Hinc nascitur argumentum subsequentium quæstionum, in quibus inquiritur, an sola multiplicatio, vel sola diuisio sufficiat, tum pro regula aurea circa propositos quoslibet numeros instituenda: tum etiam pro regula aurea, instituenda in casu in quo aliquis ex datis tribus numeris est vnitas: quo casu non differt à duabus postremis operationibus Arithmeticis, quarum altera multiplicatio, altera diuisio dicitur. Prædictis quæstionibus, addo alteram, prioribus affinem, eo ex capite, quod ad eius intelligentiam requiratur distinctio, quæ intercedit inter diuisionem, de qua agit Arithmetica, quando docet numerum in partes diuidere; & diuisionem, de qua agit Geometria, quando docet lineam rectam diui-

diuidere in partes. His quæstionibus accedunt theoremata quibus innituntur quæstionum solutiones.

Quæstio I.

Quomodo ex datis quibuslibet tribus numeris vulgaribus, inueniri posſit quartus proportionalis, mediante sola diuiſione.

SOlutio. Ex datis tribus numeris primus diuidatur per ſecundum, vel per tertium numerum: atque per productum ex hac diuiſione, diuidatur reliquus numerus. Sic enim producetur quartus proportionalis quæſitus, & per ſolam diuiſionem abſoluetur regula aurea.

Exempli gratia, primus numerus ſit 12. Secundus numerus ſit 3. Tertius numerus ſit 20. Primum numerum 12, diuidendo per ſecundum numerum 3: habetur numerus 4. Deinde, tertium numerum 20, diuidendo per inuentum numerum 4: habetur numerus 5; qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Rurſus primum numerum 12, diuidendo per tertium numerum 20: habetur numerus $\frac{12}{20}$. Deinde ſecundũ numerum 3, diuidendo per inuentum numerum $\frac{12}{20}$: habetur numerus 5; qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Solutionem in quolibet caſu legitimam eſſe, conſtat ex primo theoremate mox proponendo.

Quæſtio II.

Quomodo ex datis quibuslibet tribus numeris vulgaribus, inueniri poſsit quartus numerus ptoportionalis, mediante ſola multiplicatione.

SOlutio. Primo, aſſumatur numerus cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit primus numerus propoſitus; quomodo hoc commode fiat, quando primus datus numerus fractus eſt, dicitur in nota. Deinde aſſumptus numerus ducatur in ſecundum datum numerum. Denique hoc productum ducatur in tertium datum numerum. Sic enim habebitur quartus proportionalis quæſitus.

Nota. Scriptione vſitata in vulgari Arithmetica, exhibere numerum

merum cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit propoſitus numerus: commodum eſt, quando propoſitus numerus eſt vulgaris integer: etenim hoc caſu, ſufficit, interpoſita lineola vnitati ſubſcribere propoſitum numerum; idem tamen ita commodum non eſt, quando propoſitus numerus eſt vulgaris fractus; quia interpoſita lineola vnitati fractionem ſubſcribere, vſitatum non eſt in vulgari Arithmetica; vt hoc fiat praxi vſitata in noſtra Logiſtica, poteſt interpoſita lineola vnitati ſubſcribi fractio, repræſentata mediante particula *per*; verum hæc ſcriptio non facit ad præſentem caſum, in quo agimus cum illis, qui tantum didicerunt vulgarem Arithmeticam, aut non vtuntur, niſi ſcriptionibus vſitatis in vulgari Arithmetica. Vt huiuſmodi ſcriptione, ſaltem æquiualenter, & commodè exprimatur numerus, cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit propoſitus fractus numerus vulgaris: ſufficit propoſitum fractum numerum inuertendo, efficere, vt eius numerator fiat denominator, & viciſſim eius denominator fiat numerator. Exempli gratia, ſuppoſitus numerus ſit $\frac{3}{8}$ atque repræſentari debeat numerus cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit propoſitus numerus: ſcribendo $\frac{8}{3}$, ſaltem æquiualenter, habebis intentum. Aliter ſcriptionem Logiſticam adhibendo, ſcribi poſſet $\frac{1}{3 \text{ per } 8}$, vel certe 1 *ſed per* 3 *per* 8; tres enim poſtremæ ſcriptiones, inter ſe æquales numeros indicant.

Pro exemplo propoſitæ ſolutionis. Primus numerus ſit 12. Secundus numerus ſit 3. Tertius numerus ſit 20. Itaque aſſumptus numerus erit $\frac{1}{12}$; hic numerus ductus in 3, producit $\frac{1}{4}$, denique hoc productum ducendo in numerum 20, habetur numerus 5. qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Rurſus, primus numerus ſit $\frac{3}{8}$. Secundus numerus ſit 4. Tertius numerus ſit 6. Itaque aſſumptus numerus erit $\frac{8}{3}$; hic numerus ductus in 4 producit $10\frac{2}{3}$; denique hoc productum ducendo in numerum 6, habetur numerus 64; qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Solutionem vniuerſaliter veram eſſe conſtabit ex ſecundo ſubſequenti theoremate.

Quæſtio III.

Quomodo inueniri poſsit productum diuiſionis, mediante ſola multiplicatione.

Solutio. Aſſumatur numerus, in quo numerator ſit vnitas: & denominator, ſit diuiſor datus pro diuiſione; quomodo hoc commo-

commode fieri possit, quando diuisor datus est fractus numerus, dicitur in nota præcedentis quæstionis. Deinde assumptus numerus ducatur in numerum diuidendum. Sic enim habebitur productum ex proposita diuisione.

Exempli gratia, numerus 12 diuidendus sit per numerum 4, Assumptus numerus erit $\frac{1}{4}$; hunc numerum ducendo in numerum 12, habetur numerus 3, qui idem numerus producitur, quando 12 diuiditur per 4. Rursus numerus 12 diuidendus sit per numerum $\frac{3}{5}$, Assumptus numerus erit $\frac{5}{3}$, hunc numerum ducendo in numerum 12, habetur numerus 20; qui idem numerus habetur quando 12 diuiditur per $\frac{3}{5}$. Solutionem vniuersaliter veram esse, constabit ex subsequenti tertio theoremate.

Quæstio IV.

Quomodo inueniri possit productum multiplicationis, mediante sola diuisione.

SOlutio. Assumatur numerus in quo numerator sit vnitas, denominator vero sit vnus ex duobus numeris datis pro multiplicatione; de quo agitur in nota secundæ quæstionis. Deinde alter numerus datus pro multiplicatione, diuidatur per assumptum numerum. Sic enim habebitur productum propositæ multiplicationis.

Exempli gratia, numerus 3 ducendus sit in numerum 4. Assumptus numerus erit $\frac{1}{3}$, vel certe $\frac{1}{4}$: liberum enim est quemuis ex his duobus numeris assumere. Deinde numerum 4, diuidendo per $\frac{1}{3}$, habetur 12; & similiter numerum 3, diuidendo per $\frac{1}{4}$, habetur 12; qui idem numerus 12 habetur, quando numerus 3 ducitur in numerum 4. Rursus, numerus 6 ducendus sit in $\frac{2}{3}$. Assumptus numerus erit $\frac{1}{6}$, vel certe $\frac{3}{2}$. Deinde $\frac{2}{3}$ diuidendo per $\frac{1}{6}$, habetur numerus 4; & etiam numerum 6 diuidendo per $\frac{3}{2}$, habetur numerus 4; qui idem numerus 4 habetur, quando numerus 6 ducitur in $\frac{2}{3}$. Solutionem vniuersaliter veram esse, docet subsequens quartum theorema.

Quæ-

Quæſtio V.

An omnium numerorum poſsibilium minimus ſit vnitas.

IVxta noſtras definitiones, etiam vnitas numerus eſt: quo ſuppoſito, quæro vtrum impoſſibilis ſit aliqua quantitas diſcreta, ſiue aliquis numerus, minor vnitate: atque adeo omnium numerorum minimus ſit vnitas, vel certe poſſibilis ſit aliqua quantitas diſcreta, ſiue aliquis numerus, minor vnitate: atque adeo omnium numerorum minimus non ſit vnitas. Prius pro vtraque parte affero vnum alterumue argumentum. Deinde ſtatuo quid dicendum ſit ad propoſitam quæſtionem. Denique reſpondeo ad argumenta nobis contraria, atque prius allata. Singula perlegendo, intelliges, quid propoſita quæſtio, commune habeat cum præcedentibus quæſtionibus, in quibus egimus de regula aurea, vel certe de multiplicatione atque diuiſione, quas duas operationes, regulæ aureæ, veluti compendia eſſe, ſuo loco monuimus.

Omnium numerorum minimum eſſe vnitatem, ſuadere poſſunt ſubſequentia duo argumenta.

Primo. Quantitas diſcreta eſt ſubiectum habens terminationem; maior quantitas diſcreta, eſt ſubiectum habens plures terminationes: minor quantitas diſcreta, eſt ſubiectum habens pauciores terminationes: atqui impoſſibile eſt ſubiectum habens terminationes pauciores quam vnam: ergo omnium diſcretarum quantitatum poſſibilium, minor eſt illa, quæ habet vnicam terminationem: ſed quantitas diſcreta habens vnicam terminationem, appellatur vnitas: ergo omnium poſſibilium quantitatum diſcretarum, minor, ſiue minima, eſt vnitas: atqui omnis numerus eſt quantitas diſcreta: ergo omnium poſſibilium numerorum, minor, ſiue minimus, eſt vnitas.

Secundo. Omnes numeri indicant indiuidua, vnum ſcilicet, vel plura: & maior numerus dicitur, qui indicat plura indiuidua: minor numerus dicitur, qui indicat pauciora indiuidua: atqui manifeſtum eſt, indicari non poſſe indiuidua pauciora quam vnum: ergo impoſſibilis eſt numerus, minor illo, qui indicat vnicum indiuiduum: ſed numerus indicans vnicum indiuiduum, eſt vnitas: ergo impoſſibilis eſt numerus minor vnitate: ergo omnium poſſibilium numerorum, minimus, eſt vnitas.

Omni-

Omnium numerorum minimum non eſſe vnitatem, ſuadere poſſunt ſubſequentia duo argumenta.

Primo. Vnum dimidium, eſt numerus minor vnitate. Similiter duæ tertiæ, duæ quartæ, tres quintæ, &c. ſunt numeri minores vnitate: ergo dantur numeri minores vnitate; ergo omnium numerorum poſſibilium minimus non eſt vnitas.

Secundo. Ex eo quod quælibet recta linea poteſt diuidi, in duas, tres, quatuor, & quotlibet partes, æquales inter ſe, quæque ſingulæ ſint rectæ lineæ: legitimè ſequitur, impoſſibilem eſſe rectam lineam, quæ omnium rectarum linearum poſſibilium minima ſit; ergo ſimiliter, ex eo quod quilibet numerus diuidi poſſit in duas, tres, quatuor, & quotlibet partes inter ſe æquales, quæ partes ſingulæ numeri ſint: legitimè ſequitur, impoſſibilem eſſe numerum, qui omnium poſſibilium numerorum minimus ſit; ergo omnium poſſibilium numerorum minimus, non eſt vnitas.

Ad propoſitam quæſtionem, neque affirmatiuè, neque negatiuè reſponderi poteſt: ſed diſtinctione opus eſt; itaque.

Dico primo. Magnitudine deſumpta ab ipſo numero; omnium numerorum poſſibilium minimus, eſt vnitas.

Dico ſecundo. Magnitudine deſumpta à valore numeri, omnium numerorum eiuſdem ſpeciei minimus eſt vnitas: verum data quauis vnitate cuiuſuis ſpeciei, dari poſſunt minores numeri alterius ſpeciei.

Pro intelligentia propoſitarum aſſertionum, aduertendum eſt: non minus vſitatum eſſe apud Arithmeticos, vnum numerum altero maiorem dicere, magnitudine deſumpta ab ipſo numero, quam magnitudine deſumpta à valore numeri: tamen iſtæ duæ magnitudines magnopere inter ſe differunt, quemadmodum inter ſe maximè differunt, numerus, & valor numeri. Exempli gratia, quando dicitur quod numerus 16 linearum ſit maior numero 12 ſuperficierum: agitur de magnitudine deſumpta ab ipſis numeris; hoc eſt, à ſubiectis habentibus terminationem; & ſenſus eſt, quod prior numerus indicet plura indiuidua, ſiue plura ſubiecta habentia terminationem, quam indicentur à ſecundo numero: neque ſignificatur quod prioris numeri valor ſit maior valore poſterioris numeri. Idem contingit, quando numerus 12 binariorum, dicitur maior, numero 10 ternariorum. Vel quando numerus 12 arenularum, dicitur maior, numero 10 cumulorum compoſitorum ex arenulis. Has aliaſque ſimiles loquutiones communiter vſitatas eſſe, manifeſtum arbitror: & conſequenter vſu receptum eſſe, vnum numerum altero maiorem dicere, magnitudine deſumpta ab ipſo numero: aliter enim

P veræ

veræ dici non possent, in prædictis loquutionibus contentæ assertiones. Præterea, quando dicitur quod inter se æquales sint subsequentes numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, &c. quodque singuli isti numeri sint maiores, quam subsequentes numeri $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{12}$, &c. agitur de magnitudine desumpta à valore: & sensus est, quod omnes priores numeri æqualem valorem habeant; quodque singuli priores numeri, habeant maiorem valorem quam posteriores. Idem accidit, quando numerus A dicitur æqualis numero B, vel maior numero C: supposito quod numerus A significet 2 Scuta, & quod numerus B significet 20 Iulios, quodque numerus C significet 14 Iulios. Has & alias similes loquutiones communi vsu admissas arbitror: quandoquidem enim apud Arithmeticos admittatur, non esse possibilem subtractionem ex qua relinquatur aliquod residuum, nisi quando minor numerus ex maiore subtrahitur: & etiam doceant ex $\frac{2}{4}$ subtrahendo $\frac{2}{5}$, relinqui aliquod residuum: atque similiter ex 2 Scutis subtrahendo 14 Iulios, relinqui aliquod residuum: constat iuxta ipsos numerum $\frac{2}{4}$ esse minorem numero $\frac{2}{1}$: & numerum 2 Scutorum esse maiorem numero 14 Iuliorum: magnitudine tamen desumpta à valore. Ex paucis quæ hic annotauimus, abundè constare arbitror, apud Arithmeticos vsitatum esse, vnum numerum altero maiorem dicere: tum magnitudine desumpta ab ipso numero, tum etiam magnitudine desumpta à valore numeri; atque silentio inuoluo alia quam plurima, ex quibus idem possem inferre. Quod vnum numerum altero maiorem afferendo, vix vnquam expressè addant, de qua magnitudine loquantur: non male videtur fieri; quandoquidem ex circumstantiis satis colligatur de qua magnitudine sermo sit; sic etiam ego, in reflexione secunda, varios numeros considero, quos omnes inter se æquales affirmo, nulla addita distinctione: licet aliqui tantum æquales sint magnitudine desumpta ab ipsis numeris: alij vero tantum æquales sint magnitudine desumpta à valore. Idem alibi passim inuenies, tum in præcedenti Arithmetica, tum in nostra Logistica.

Ex hac expositione diuersarum magnitudinum, quarum vna, ab ipso numero, altera à valore numeri dependet: manifestus est sensus duarum assertionum paulo ante adductarum, pro responsione ad propositam quæstionem. Reliquum est, vt exponam quid dicendum sit ad argumenta prius allata, atque istis assertionibus nostris aduersantia; tale nihil aduerto in tribus prioribus argumentis: etenim in primo, & secundo, tantum agitur de magnitudine numeri, quæ desumitur ab ipso numero: atque stabilitur prior assertio. In tertio argumento, agitur de magnitudine quæ desumitur à valore

nume-

numeri: atque probatur ſecunda aſſertio. Poſtremum argumentum, noſtris aſſertionibus aduerſatur: verum nihil contra nos euincit; proponit enim planè vitioſam paritatem, male deſumptam ab identitate vocis, quæ diuerſas ſignificationes admittit; etenim, toto vt ita dicam cælo, inter ſe diuerſa ſignificat, vox diuidere, quando quantitas continua, ſiue linea dicitur diuidi: & quando aliqua quantitas diſcreta, ſiue numerus aliquis, diuidi dicitur. Vt hæc diuerſitas melius appareat, iuuabunt ſequentia. Primo, qui continuam quantitatem diuidit, bene dicitur continuam quantitatem ſecare in partes: qui numerum diuidit, non bene dicitur numerum ſecare in partes. Secundo, quod producitur ex diuiſione quantitatis continuæ neceſſario eſt aliquid minus ipſa quantitate continua quæ diuiditur: quod producitur ex numero qui diuiditur, non eſt neceſſario minus numero qui diuiditur, ſed poteſt illo maius eſſe, vel illi æquari. Tertio, quando exempli gratia vna linea recta diuiditur in partes æquales, ſingulæ partes productæ ex diuiſione, neceſſario ſunt eiuſdem ſpeciei, cum linea quæ diuiditur: verum quando vnitas in partes æquales diuiditur, tunc partes productæ ex diuiſione, neceſſario ſpecie differunt ab vnitate quæ diuiditur. Quarto quantitatem continuam diuidere in partes, non eſt inſtituere regulam auream, ſiue tres quantitates datas inuenire quartam proportionalem: verum numerum diuidere, eſt inſtituere regulam auream, ſiue ad tres datas quantitates inuenire quartam proportionalem. Quinto impoſſibile eſt, vnam lineam diuidere per vnam, vel duas, vel tres alias lineas: non eſt impoſſibile vnam vnitatem diuidere per vnam, vel duas, vel tres alias vnitates. Singula quæ hic aſſeruntur de diuiſione quantitatis continuæ, intelligenda ſunt, de illa diuiſione de qua agitur in Geometria, quando demonſtratur, quamlibet rectam lineam diuidi poſſe in quotlibet partes æquales: de hac enim diuiſione agitur in propoſito argumento. Cæterum, etiam circa continuas quantitates inſtitui poteſt multiplicatio, & diuiſio, quæ circa numeros docetur in vulgari Arithmetica: vt pluribus exponitur in Logiſticæ Idea; immo iuxta nos quælibet quantitas, vel realiter, vel æquiualenter poteſt diuidi, per quamlibet aliam quantitatem, aut in illam duci; quod niſi verum foret, de quibuſcunque quantitatibus non verificarentur ſubſequentia theoremata; vera enim non forent de quantitatibus circa quas non poteſt inſtitui multiplicatio, aut diuiſio; placuit tamen ſingula proponere, atque demonſtrare, de quibuſcunque quantitatibus: quandoquidem non tantum pro numeris, verum etiam pro alijs quantitatibus vtilia ſint: atque non difficilius probentur de quantitatibus omnibus, quam de ſolis numeris. Vt

P 2 ſingu-

singula habeantur restricta ad solos numeros, in ipsis titulis, siue in hypothesi, pro voce *quantitates*, sufficit substituere vocem *numeri*.

Quatuor priora theoremata quæ subsequuntur, sunt illa, in quibus fundantur solutiones quatuor primarum quæstionum paulo ante propositarum. Quintum theorema, continet fundamentum problematis, quo hanc appendicem terminamus: in quo problemate simul proponuntur, varij, atque aliquantulum diuersi modi instituendi Regulam Auream, de quibus hactenus egimus in præsenti opusculo.

Pro vnoquoque theoremate, requiritur notitia Logisticarum scriptionum: atque notandum est, quod quando successiua scriptio, in qua inueniuntur plura membra particula *in* vel *per* connexa, nusquam interrupta est particula *sed*: tunc scriptio indicat, tum ipsas operationes instituendas, tum etiam ordinem quo illæ operationes successiuè instituendæ sunt; quoties vero, huiusmodi successiua scriptio interrupta est particula *sed*, immediatè præposita particulæ *in* vel *per*: significatur, illud quod præcedit particulam illam, *sed*, multiplicari, vel diuidi debere, per illud quod sequitur in eadem scriptione. Exempli gratia, scriptio A *in* B *per* C, significat A ductum in B, atque hoc productum diuisum per C: verum scriptio A *sed in* B *per* C, significat A ductum in productum ex B diuiso per C. Similiter scriptio A *per* B *in* C, significat A diuisum per B, atque hoc productum ductum in C: verum scriptio A *sed per* B *in* C, significat A diuisum per productum ex B ducto in C. Pari modo, scriptio A *per* B *per* C, significat A diuisum per B, atque hoc productum diuisum per C. Verum A *sed per* B *per* C, significat A diuisum per productum ex B diuiso per C.

Iudicatas scriptiones Logisticas, adhibemus in demonstrationibus subsequentium theorematum, tum ne cogamur interpositis lineolis, litteris litteras subscribere, tum etiam ne æquiuocationi obnoxiæ sint, quando scripto non exhibentur, sed tantum ab alio lectæ audiuntur. Quatuor priorum theorematum assertiones, duplici diuersa scriptione proponimus, vt legi possint, expressæ ea scriptione, quæ videbitur commodior.

Vt ex assertionibus duorum priorum theorematum, commode inferantur solutiones duarum priorum quæstionum: reflectendum est ad primam assertionem quinti theorematis: in qua statuitur, quod scriptio, B *in* C *per* A, significet quartum terminum proportionalem, quoties primus est A, secundus B, tertius C. Ex quo patet eumdem illum quartum proportionalem terminum, indicari, à qualibet scriptione, quæ æquiualet scriptioni B *in* C *per* A; huic

scri-

scriptioni æquiualentes sex aliæ scriptiones, proponuntur in secunda parte quinti theorematis, atque singulæ indicant aliquantulum diuersum ordinem operationum, per quas ex datis tribus terminis inueniri potest quartus proportionalis. Hinc resultat problema, quo præsentem appendicem claudimus, & continet septem modos soluendi Regulam Auream, inter se aliquantulum diuersos, atque hactenus separatim propositos.

Theorema I.

Qualescunque sint quantitates A, B, C.

Dico. B *in* C *per* A = B *sed per* A *per* C ♎ C *sed per* A *per* B.

Vel, quod idem est $\frac{B \text{ in } C}{A} = \frac{B}{A \text{ per } C}$ ♎ $\frac{C}{A \text{ per } B}$

Demonstratio. Per coroll. theor. 3. partis 4 Ideæ Logisticæ, B *in* C *per* A = B *per* A *in* C ♎ C *per* A *in* B: sed, per axioma primum partis 4. Ideæ Logisticæ, B *per* A *in* C = C *sed in* B *per* A, & etiam C *per* A *in* B = B *sed in* C *per* A: ergo, B *in* C *per* A = C *sed in* B *per* A ♎ B *sed in* C *per* A: atqui, per theorema propositum cap. 7. siue pagina 57. huius opusculi, C *sed in* B *per* A = C *sed per* A *per* B, & insuper, B *sed in* C *per* A = B *sed per* A *per* C: ergo, B *in* C *per* A = B *sed per* A *per* C ♎ C *sed per* A *per* B. Quod erat demonstrandum.

Theorema II.

Qualescunque sint quantitates A, B, C.

Dico. B *in* C *per* A = 1 *per* A *in* B *in* C.

Vel quod idem est, $\frac{B \text{ in } C}{A.} = \frac{1}{A}$ in B in C.

Constructio, B *in* C = D.

Demonstratio. Per coroll. theor. 3 partis 4. Ideæ Logisticæ, D *in* 1 *per* A = 1 *per* A *in* D: sed, D *in* 1 *per* A = D *per* A: ergo, D *per* A = 1 *per* A *in* D, atqui per constructionem, B *in* C = D; ergo etiam B *in* C *per* A = 1 *per* A *in* B *in* C. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema III.

Qualeſcunquè ſint quantitates A &B.

Dico. A *per* B = 1 *per* B *in* A.

Vel, quod idem eſt, dico, $\frac{A}{B} = \frac{1}{B}$ in A.

Demonſtratio. Per axioma primum partis 4. Ideæ Logiſticæ, 1 *per* B *in* A = A *ſed in* 1 *per* B; ſed, per theorema propoſitum capite 7. ſiue pagina 57. huius opuſculi, A *ſed in* 1 *per* B = A *ſed per* B *per* 1 ≏ A *per* B; ergo, A *per* B = 1 *per* B *in* A. Quod erat demonſtrandum.

Theorema IV.

Qualeſcunque ſint quantitates A & B.

Dico. A *in* B = A *ſed per* 1 *per* B ≏ B *ſed per* 1 *per* A.

Vel, quod idem eſt dico, A *in* B = $\frac{A}{1 \text{ per } B}$ ≏ $\frac{B}{1 \text{ per } A.}$

Demonſtratio. Per theorema primum hic propoſitum A *in* B *per* 1 = A *ſed per* 1 *per* B ≏ B *ſed per* 1 *per* A: atqui, A *in* B *per* 1 = A *in* B; ergo, A *in* B = A *ſed per* 1 *per* B ≏ B *ſed per* 1 *per* A. Quod erat demonſtrandum.

Theorema V.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C.

Dico primo. A *ad* B = C *ad* B *in* C *per* A.

Dico ſecundo. B *in* C *per* A = C *in* B *per* A ≏ B *per* A *in* C ≏ C *per* A *in* B ≏ B *ſed per* A *per* C ≏ C *ſed per* A *per* B ≏ 1 *per* A *in* B *in* C.

Prima aſſertio, demonſtrata eſt in theoremate 3. partis 4. Ideæ Logiſticæ. Ex eiuſdem theorematis corollario, vel ex primo, aut ſecundo theoremate hic propoſito, immediate patet ſecunda aſſertio. Etenim in ſecunda aſſertione contentam primam ſcriptionem, æquari, ſiue æquiualere, tribus alijs proxmè ſubſequentibus, conſtat ex corollatio theorematis 3. partis 4. Ideæ Logiſticæ: eamdem primam

ſcri-

scriptionem æquari, siue æquiualere, quintæ & sextæ scriptioni, ostensum est in primo theoremate hic proposito; denique eamdem primam scriptionem, æquari, siue æquiualere septimæ scriptioni, docetur in secundo theoremate hic proposito; atque adeo patet, omnes septem scriptiones hic propositas, æquari, siue æquiualere inter se.

Problema.

Continens septem diuersas solutiones Regulæ Aureæ.

DAti sint quiuis tres numeri, quorum primus sit A, secundus B, tertius C.

Oporteat inuenire quartum numerum proportionalem.

In exemplo vniuscuiusque solutionis, supponitur, quod numerus A sit 12; numerus B sit 8; numerus C sit 6;

Prima solutio. Secundus numerus B, ducatur in tertium numerum C: deinde productum ex hac multiplicatione, diuidatur per primum numerum A. Exempli gratia, 8 ductum in 6 dat 48: deinde 48 diuisum per 12 dat 4: adeoque quartus proportionales est 4.

Secunda solutio. Tertius numerus C ducatur in secundum B: deinde productum ex hac multiplicatione diuidatur per primum numerum A. Exempli gratia, 6 ductum in 8 dat 48: deinde 48 diuisum per 12, dat numerum 4; qui est quartus proportionalis.

Tertia solutio. Secundus numerus B diuidatur per primum A: deinde productum ex hac diuisione ducatur in tertium numerum C. Exempli gratia, 8 diuisum per 12 dat $\frac{2}{3}$: deinde $\frac{2}{3}$ ducendo in 6, producitur numerus 4; qui est quartus proportionalis.

Quarta solutio. Tertius numerus C diuidatur per primum numerum A: deinde productum ex hac diuisione ducatur in secundum numerum B. Exempli gratia, 6 diuisum per 12 dat $\frac{1}{2}$: deinde $\frac{1}{2}$ ducendo in numerum 8, producitur numerus 4; qui est quartus proportionalis.

Quinta solutio. Primus numerus A diuidatur per tertium numerum C: Deinde per productum ex hac diuisione diuidatur secundus numerus B. Exempli gratia, 12 diuisum per 6 dat 2: Deinde 8 diuidēdo per 2 producitur numerus 4; qui est quartus proportionalis.

Sexta solutio. Primus numerus A diuidatur per secundum numerum B: deinde per productum ex hac diuisione diuidatur tertius nu-

numerus C. Exempli gratia 12 diuiſum per 8 dat $1\frac{1}{2}$; deinde 6 diuidendo per $1\frac{1}{2}$ producitur numerus 4; qui eſt quartus Proportionalis.

Septima ſolutio, Inuertatur primus numerus A, vt eius numerator fiat denominator, & eius denominator fiat numerator, atque vocetur aſſumptus numerus. Deinde aſſumptus numerus ducatur ſucceſſiuè in ſecundum & tertium numerum. Exempli gratia inuertendo numerum 12, habetur $\frac{1}{12}$ & aſſumptus numerus erit $\frac{1}{12}$; hunc numerum ducendo in 6 habetur $\frac{1}{2}$: deinde $\frac{1}{2}$ ducendo in 8, producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis. Similiter $\frac{1}{12}$ ducendo in 8, habetur numerus $\frac{2}{3}$: quem ducendo in 6 producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.



A	B	C
1	3	0
2	6	0
3	9	0
4	1/2	0
5	1/5	0
6	1/8	0
7	2/1	0
8	2/4	0
9	2/7	0

Fig. 1.ª

1	3	9
2	6	1/8
3	9	2/7
4	1/2	3/6
5	1/5	4/5
6	1/8	5/4
7	2/1	6/3
8	2/4	7/2
9	2/7	8/1

Fig. 2.ª